Bhaskaracharya's BIJAGANITHAM



चक्र क्रौञ्चाकुलितसलिले क्वापि दृष्टे तडागे
तोयादूर्ध्वं कमलकलिकाग्रं वितस्तिप्रमाणं
मन्दं मन्दं चलितमनिलेनाहतं हस्तयुग्मे
तस्मिन्मग्नं गणक कथयः क्षिप्रमम्बुप्रमाणं।

Dr. V.B. Panicker



Bharatiya Vidya Bhavan

ഭാസ്ക്കരാചാര്യരുടെ ബീജഗണിതം

Bhaskaracharya's BIJAGANITHAM

ചക്ര ക്രൗഞ്ചാകുലിത സലിലേ ക്വാപി ദൃഷ്ടം തടാകേ
തോയാദ് ഊർധ്വം കമല കലികാഗ്രം വിതസ്തി പ്രമാണം
മന്ദം മന്ദം ചലിതം അനിലേനാഹതം ഹസ്ത യുഗ്മേ
തസ്മിൻ മഗ്നം ഗണക കഥയ ക്ഷിപ്രം അംബു പ്രമാണം

ഭാഷാവ്യാഖ്യാനം

വ്യാഖ്യാതാ: ഡോ. വി.ബി. പണിക്കർ

Malayalam Translation with Solutions of Examples by

Dr. V.B. Panicker



Published by:
Swadeshi Science Movement (Kerala)
T.D. ROAD, KOCHI - 682 035

ഭാസ്ക്കരാചാര്യരുടെ

ബീജഗണിതം

സ്വദേശിശാസ്ത്രപ്രസ്ഥാനത്തിന്റെ
മറ്റു പ്രസിദ്ധീകരണങ്ങൾ

1. **Golden Age of Indian Mathematics**
by Dr. S. Parameswaran

2. **Interface - by Dr. C.G. Ramachandran Nair**

3. **Science India (Monthly)**

4. **സ്വദേശി സയൻസ് (മലയാളം- ദ്വൈമാസികം)**

5. **നദീവന്ദനം - (5 പുസ്തകങ്ങൾ)**

6. **ആത്രേയം - G. അനിൽകുമാർ**

ഭാസ്ക്കരാചാര്യരുടെ

ബീജഗണിതം

(മലയാള പരിഭാഷ)

പരിഭാഷകൻ

ഡോ. വി. ബാലകൃഷ്ണപണിക്കർ

സ്വദേശി ശാസ്ത്രപ്രസ്ഥാനം (കേരളം) കൊച്ചി

(മലയാളം)

ഭാസ്കരാചാര്യരുടെ ബീജഗണിതം

BIJAGANITHAM(BHASKARACHARYA'S)

Translation with solutions of examples

By

Dr. V. Balakrishna Panicker

(ഡോ. വി. ബാലകൃഷ്ണപണിക്കർ)

First Edition 1000 Copies

Year - 2003

Printed at

Kallur Offset ,

Ph : 95491-255572

Olavakkode, Palakkad.

Published by

സ്വദേശി ശാസ്ത്രപ്രസ്ഥാനം(കേരളം) കൊച്ചി

Swadeshi Science Movement (Kerala) Kochi.

Swadeshi Bhavan,

58/2569, T. D. Road, Kochi - 682 035

Rs. 125.00

ISBN 81 - 901740 - 0 - 2

പ്രസാധകക്കുറിപ്പ്

ഭാസ്ക്കരാചാര്യരുടെ സിദ്ധാന്തശിരോമണി എന്ന സുപ്രസിദ്ധ കൃതിയുടെ രണ്ടാം അംശമാണ് ബീജഗണിതം എന്ന ഗ്രന്ഥ ഈ കൃതിയുടെ മലയാള പരിഭാഷ ഇന്നു ലഭ്യമല്ല. പ്രാചീ ഭാരതീയ ശാസ്ത്രഗ്രന്ഥങ്ങൾ പരിഭാഷപ്പെടുത്തി കേരളീയരാ ശാസ്ത്ര സ്നേഹികൾക്ക് ലഭ്യമാക്കുന്നതിന് സ്വദേശി ശാസ്ത്ര പ്രസ്ഥാനം പ്രതിജ്ഞാബദ്ധമാണ്. ഡോ. ബാലകൃഷ്ണ പണിക്ക രചിച്ച ഈ ബീജഗണിത വ്യാഖ്യാനം പ്രസിദ്ധീകരിക്കുന്നതി ഞങ്ങൾക്ക് അതിയായ സന്തോഷമുണ്ട്. ഇതിന്റെ അച്ച ഭംഗിയായി നിർവ്വഹിച്ചുതന്ന പാലക്കാട് കല്ലൂർ പ്രസ്സിനോട ഇതിന് പ്രൗഢമായ ഒരു അവതാരിക എഴുതി അനുഗ്രഹി ഡോ. എ. സുകുമാരൻ നായർ (മുൻ വൈസ്. ചാൻസല മഹാത്മാഗാന്ധി യൂണിവേഴ്സിറ്റി) അവർകളോടുമുള്ള ഞങ്ങളു നന്ദി രേഖപ്പെടുത്തുന്നു.

ചെയർമാ

പ്രസിദ്ധീകരണവിഭാഗ

സ്വദേശിശാസ്ത്രപ്രസ്ഥാന

കൊച്ചി

01-07-2003

ഉള്ളടക്കം

ബീജഗണിതം

അവതാരിക

പ്രാചീന ഭാരതത്തിന്റെ ഗണിതശാസ്ത്ര സംഭാവനകളെപ്പറ്റി തെറ്റായ ധാരണകളാണ് അടുത്തകാലം വരെ ഇൻഡ്യയിൽത്തന്നെ നിലനിന്നിരുന്നത്. പ്രാമാണികരായ പാശ്ചാത്യ ഗണിതശാസ്ത്ര ചരിത്രകാരന്മാരും ഇൻഡ്യയുടെ ഗണിതശാസ്ത്ര സംഭാവനകളെ ശരിയായി വിലയിരുത്താതെ അവ പലതും യൂറോപ്യൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞരുടെ സംഭാവനകളായി കണ്ടുകൊണ്ടാണ് അടുത്ത കാലംവരെ ചരിത്രരചന നടത്തിയിരുന്നത്. പോൾ ഡാനറി തുടങ്ങിയ പ്രാമാണിക ചരിത്രകാരന്മാരാണ് പക്ഷപാതപരമായ സമീപനത്തിന് അടിത്തറയിട്ടത്. ഈ ചരിത്രഗ്രന്ഥങ്ങളുടെ പാശ്ചാത്തലത്തിലാണ് പ്രൊഫസർ കയേയെപ്പോലുള്ള ഇൻഡ്യയിലെ പ്രമുഖ ഗണിത ശാസ്ത്ര ചരിത്രകാരന്മാർ പോലും നമ്മുടെ ഗണിതശാസ്ത്ര സംഭാവനകളെ വിലയിരുത്തിയിരുന്നത്. ഭാരതത്തിന്റെ ഗണിത ശാസ്ത്ര സംഭാവനകളെ നിസ്സാരവൽക്കരിക്കുന്ന ഒരു സംസ്ക്കാരം ഇൻഡ്യയിൽ തന്നെ വളർന്നുവന്നു. വസ്തുനിഷ്ഠമായി വസ്തുതകൾ പഠിക്കാൻ ശ്രമിച്ചപ്പോൾ മാത്രമാണ് ഇൻഡ്യൻ ഗണിത ശാസ്ത്ര ജ്ഞന്മാരുടെ മഹത്വം മറ്റു രാജ്യക്കാർക്ക് മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിഞ്ഞത്. ആധുനിക ഗണിതശാസ്ത്ര ചരിത്രകാരന്മാരിൽ പ്രമുഖനായ ഒരു മലയാളിയായ ഗവേഷകൻ **('The Crest of Peacock' - Non- European roots of the Mathematics' - Dr. George Ghee Vargheese Joseph Affiliated East-West Books Pvt Ltd:** ഇദ്ദേഹം ഇപ്പോൾ ഇംഗ്ലണ്ടിലെ മാഞ്ചസ്റ്റർ സർവ്വകലാ ശാലയിൽ അധ്യാപകനാണ്.**)** ഇൻഡ്യൻ ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിന് ഏതാണ്ട് **5000** വർഷത്തെ പഴക്കമുണ്ടെന്ന് ചരിത്രരേഖകളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ചൂണ്ടിക്കാണിക്കുന്നു. ബി.സി.കളിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന ബൗദ്ധായനൻ, കാത്യായനൻ തുടങ്ങിയ ശാസ്ത്രജ്ഞൻമാർ തുടങ്ങിവെച്ച ഗണിതപഠനം **400 - 1200** എ.ഡി.വരെയുള്ള കാല ഘട്ടത്തിൽ ആര്യഭടൻ ഒന്നാമൻ, വരാഹമിഹിരൻ, ശ്രീധരൻ, ഭാസ്ക്കരാചാര്യൻ രണ്ടാമൻ തുടങ്ങിയ ശാസ്ത്രജ്ഞന്മാരുടെ പ്രവർത്തനത്തിൽക്കൂടി വികസിച്ച് എ.ഡി. **1200 മുതൽ 1600** വരെയുള്ള കാലഘട്ടത്തിൽ ഒരു പൂർണ്ണശാസ്ത്ര മേഖലയായി വളർന്നുവെന്ന് ഇദ്ദേഹം ചൂണ്ടിക്കാണിക്കുന്നു. ഇവരിൽ നാരായണ പണ്ഡിതൻ, പരമേശ്വരൻ, സംഗ്രമഗ്രാമമാധവൻ, നീലകണ്ഠ സോമ യാജി എന്നിവർ ആധുനിക ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഉന്നതമേഖല കളിലേക്ക് കടന്നു ചെന്നു എന്ന് പുതിയ ചരിത്രകാരന്മാർ വില യിരുത്തുന്നു. ഇവരെല്ലാം മലയാളക്കരയിലാണ് പ്രവർത്തിച്ചിരുന്നത്

എന്ന വസ്തുത നമുക്ക് അഭിമാനത്തിനു വക നൽകുന്നു. മാധവാചാര്യൻ, ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ വ്യാകരണമെന്നു വിശേഷിപ്പിക്കാവുന്ന അനന്തശ്രേണികളുടെ പഠനത്തിനു തുടക്കം കുറിച്ചു.

ഭാരതീയഗണിതത്തിന് ഭാവവും രൂപവും നൽകുന്നതിൽ ഏറ്റവും പ്രമുഖമായ പങ്കുവഹിച്ചിട്ടുള്ള ഭാസ്ക്കരാചാര്യൻ രണ്ടാമന്റെ ബീജഗണിത രംഗത്തെ സംഭാവനകളെ മലയാളികൾക്ക് പരിചയപ്പെടുത്തുകയാണ് ഡോ. വി. ബി. പണിക്കർ. പ്രൊഫസ്സർ അഭയങ്കർ സംസ്കൃതത്തിൽ നിന്നും ഇംഗ്ലീഷിലേക്ക് വിവർത്തനം ചെയ്ത കൃതിയെ ആസ്പദമാക്കിയാണ് ഡോ. പണിക്കർ ഗ്രന്ഥരചന നടത്തിയിട്ടുള്ളത്. മൂലഗ്രന്ഥത്തിലെ ഗണിതപ്രശ്നങ്ങൾക്ക് വിശദമായ നിർധാരണവും കൊടുത്തിട്ടുള്ളത് ഗണിതവിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് വളരെ സഹായകമാണ്.

11 അദ്ധ്യായങ്ങളിലായി ഭാസ്ക്കരാചാര്യന്റെ ബീജഗണിത ശാഖയ്ക്കു നൽകിയ സംഭാവനകളാണ് ഗ്രന്ഥത്തിന്റെ ഉള്ളടക്കം. ലളിതമായ പ്രതിപാദനരീതി ഈ ഗ്രന്ഥത്തിന്റെ പ്രത്യേകതയാണ്. വിരസമായ ഗണിതശാസ്ത്രതത്വങ്ങളെ രസകരമാക്കുന്ന അവതരണ ശൈലി ഈ പുസ്തകത്തിന്റെ മാറ്റു വർദ്ധിപ്പിക്കുന്നു. വളരെ ആഴത്തിലുള്ള ഗവേഷണങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് അദ്ദേഹം ഈ ഗ്രന്ഥത്തിന്റെ ഉള്ളടക്കത്തിനു രൂപം നൽകിയിട്ടുള്ളത്. ഭാരതത്തിന്റെ ഗണിത ശാസ്ത്രപാരമ്പര്യത്തെ നിസ്സാരവൽക്കരിക്കുന്ന ചരിത്രകാരന്മാർക്ക് ഒരു വെല്ലുവിളിയായിരിക്കും ഈ ചെറുഗ്രന്ഥം.

ഈ ഗ്രന്ഥം കേരളക്കരയിലെ ഗണിതശാസ്ത്രകുതകികളുടെ മുൻപിൽ അവതരിപ്പിക്കാൻ എനിക്ക് അത്യധികം സന്തോഷമുണ്ട്.

എന്ന്

ഡോ. എ. സുകുമാരൻ നായർ

(റിട്ട) വൈസ് ചാൻസലർ

മഹാത്മാഗാന്ധി യൂണിവേഴ്സിറ്റി.

BIJAGANITHAM(BHASKARACHARYA'S)

Translation with solutions of examples

Dr. V. Balakrishna Panicker

ആമുഖം

ബീജഗണിതം

ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ ബാലപാഠങ്ങൾക്കു രൂപം കൊടുത്തത് ഭാരതമാണ്. പൂജ്യം ഉൾപ്പെടെയുള്ള ദശാടിസ്ഥാന സംഖ്യാക്രമങ്ങൾ വേദകാലം മുതൽതന്നെ ഭാരതീയ ആചാര്യന്മാർ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു. അക്കങ്ങൾക്കു പകരം അക്ഷരങ്ങളും സുപരിചിതമായ ദ്രവ്യനാമങ്ങളും ഉപയോഗിച്ചുള്ള കാവ്യരചനാ സമ്പ്രദായം സാഹിത്യവും ഗണിതവും സമന്വയിപ്പിക്കാൻ ഉപകരിച്ചു. താരതമ്യേന ഗഹനവും വിരസവുമെന്ന് പൊതുവെ കരുതപ്പെടുന്ന ഗണിതശാസ്ത്രപഠനം ആലോചനാമൃതമായ ഒരു അനുഭവമാക്കിമാറ്റാൻ നമ്മുടെ പൂർവ്വികർ ശ്രദ്ധിച്ചിരുന്നതിനാലാകാം മറ്റു ശാസ്ത്രശാഖകളേക്കാൾ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന് കൂടുതൽ അടിസ്ഥാനപരമായ സംഭാവനകൾ നൽകാൻ ഭാരതത്തിനു കഴിഞ്ഞത്.

ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലെ പ്രബലമായ ഒരു വിഭാഗമാണ് ബീജഗണിതം. ബീജം എന്നാൽ മൂലകം എന്നാണ് വിവക്ഷ. അതുകൊണ്ടുതന്നെ ഗണിതക്രിയകൾക്കു മൂലകമായ ഈ വിഭാഗത്തിന് ബീജഗണിതം എന്ന് പേർ നൽകിയിരിക്കുന്നു. എ.ഡി. **628** ൽ ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ ബീജഗണിതക്രിയകൾക്ക് കൂട്ടക ഗണിതം അഥവാ സംശോധനം എന്ന് നാമകരണം ചെയ്തിരുന്നു. പ്രഥൂദകസ്വാമിയായിരുന്നു ഇതിനു ബീജഗണിതമെന്ന് സംജ്ഞ ആദ്യമായി നൽകിയത്. അവ്യക്ത സംഖ്യകളുടെ ഗണിതമായതിനാൽ പല പൂർവ്വികന്മാരും ഇതിനെ അവ്യക്തഗണിതമെന്നു വിളിച്ചിരുന്നു. ദൃഢസംഖ്യകളുടെ ഗണിതം വ്യക്തഗണിതമെന്നും അറിയപ്പെട്ടിരുന്നു. ഭാസ്ക്കരാചാര്യൻ (രണ്ടാമൻ) എ.ഡി. **1150** ൽ ഈ ഗണിതശാഖയെ വ്യക്തമായി നിർവ്വചിച്ചു. മന്ദബുദ്ധികളുടെ ബുദ്ധിശക്തി വളർത്താൻ ഘടകങ്ങൾക്കു സംജ്ഞകൾ നൽകി ക്രിയ ചെയ്ത് അവയുടെ മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കാൻ ബീജഗണിതത്തിന് പൂർവ്വികന്മാർ രൂപം കൊടുത്തു എന്ന് അദ്ദേഹം പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. ബീജക്രിയകൾക്ക് നിയമങ്ങൾ ആവിഷ്ക്കരിച്ചത് ആരാണെന്നോ ഏത് കാലഘട്ടത്തിലായിരുന്നെന്നോ സൂചനകളൊന്നുമില്ല. ഇത് പൂർവ്വികർ കണ്ടെത്തിയ വിജ്ഞാനമാണെന്ന് ഭാസ്ക്കരൻ പറയുന്നു. താൻ അത് ലളിതമായി പ്രതിപാദിക്കുക മാത്രമേ ചെയ്തിട്ടുള്ളൂ എന്ന് അദ്ദേഹം അവകാശപ്പെടുന്നു. നാരായണൻ (**1350** എ. ഡി.) പറഞ്ഞിട്ടുള്ളത്

ബീജഗണിതത്തിന്റെ ശ്രോതസ്സ് 'ബ്രഹ്മ'മാണെന്നാണ്.

ബീജഗണിതവിജ്ഞാനം രണ്ടുശാഖകളായി വിഭജിച്ചിട്ടുണ്ട്. അടിസ്ഥാനഗണിതക്രിയകളുടെ നിയമങ്ങൾ, ധനന്യൂന ചിഹ്നങ്ങൾ, ശ്യൂന്യംകൊണ്ടുള്ള ഗണിതക്രിയകൾ, കരണികൾ, കുട്ടകം എന്നിവ ആദ്യഭാഗത്തിലും സംശോധനം രണ്ടാമത്തെ വിഭാഗത്തിലും ഉൾപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. ഈ ക്രിയകൾ അങ്കഗണിതത്തിനും ബാധകമാകയാൽ അവിടേയും ഈ നിയമങ്ങൾ ആവർത്തിച്ചു വിവരിച്ചിട്ടുണ്ട്. ലീലാവതിയിലും ബീജഗണിതത്തിലും അവ ബോധവൂർവ്വം ഉൾകൊള്ളിക്കാൻ ഇതാണ് കാരണം.

ബീജഗണിതത്തിലുള്ള ദ്വിഘാതസമവാക്യനിർധാരണ ക്രിയകൾ സുൽബസൂത്രങ്ങളിലും ശതപഥബ്രാഹ്മണങ്ങളിലും മറ്റും യജ്ഞവേദികളുടെ അളവുകൾ നിർണ്ണയിക്കുന്നതിന് ഉപയോഗിച്ചിരുന്നതായി കാണാം. അതോടൊപ്പം ഘടകങ്ങൾക്ക് അനവധി മൂല്യങ്ങൾ കണ്ടെത്താവുന്ന അനിർധാര്യസമവാക്യങ്ങളും ഉരുത്തിരിഞ്ഞുവന്നു. അവയിൽ ഏകഘാതസമവാക്യങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം ആര്യഭടൻ **(499** എ.ഡി.**)** ആര്യഭടീയത്തിൽ വിവരിച്ചിട്ടുണ്ട്. എന്നാൽ ദ്വിഘാത അനിർധാര്യസമവാക്യങ്ങൾ സംശോധനം ചെയ്യുന്നതിന്റെ അടിസ്ഥാന പ്രമാണങ്ങൾ ആവിഷ്ക്കരിച്ചത് ബ്രഹ്മഗുപ്തനാണെന്നു തോന്നുന്നു. **(**എ.ഡി. **628)**, ഭാസ്ക്കരാചാര്യർ നിർദ്ദേശിച്ച ചക്രവാളരീതി ബ്രഹ്മഗുപ്തന്റെ ഭാവനാരീതിയുടെ തുടർച്ചയായിട്ടുവേണം കരുതാൻ. പാശ്ചാത്യർ ഈ സമവാക്യത്തിന് ഡയഫന്റസ് സമവാക്യമെന്നും പെല്ലിയൻ സമവാക്യമെന്നും പിന്നീടു നാമകരണം ചെയ്തു. എന്നാൽ ഈ പാശ്ചാത്യ ഗണിതജ്ഞന്മാരുടെ സംഭാവന എന്തായിരുന്നു എന്ന് വ്യക്തമല്ല.

ബീജഗണിതത്തിൽ അവ്യക്തസംഖ്യയ്ക്കു നൽകിയിട്ടുള്ള സംജ്ഞ യാവത്ത് താവത്ത്, വർണ്ണം എന്നും മറ്റുമാണ്. യാവത്ത് താവത്ത് (എത്രയാണോ അത്രമാത്രം) കാലകം, നിലകം, പീതം തുടങ്ങിയ നാമങ്ങളുടെ ആദ്യ അക്ഷരങ്ങളായ യാ, കാ, നി, പി തുടങ്ങിയവ വ്യത്യസ്ത ഘടകങ്ങൾ തിരിച്ചറിയുന്നതിന് (ഇപ്പോൾ ഉപയോഗിച്ചുവരുന്നവ **X,Y,Z** തുടങ്ങിയവയാണ്) എത്രയോമുമ്പു തന്നെ ഭാരതീയർ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു.

ബീജഗണിതത്തിലും അങ്കഗണിതത്തിലെന്നപോലെ ഗണിതക്രിയകൾക്കു വിവിധ നാമങ്ങൾ നൽകിയിട്ടുണ്ട്. വർഗ്ഗം, ഘനം, വർഗ്ഗവർഗ്ഗം തുടങ്ങിയവ സംഖ്യകളുടെയും അവ്യക്ത

ഘടകങ്ങളുടേയും ഘാതങ്ങൾ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഉത്തരാധ്യയന സൂത്രത്തിലാണ്(ബി.സി.200നു മുമ്പ്) ഇവ ആദ്യമായി ഉപയോഗിച്ചു കാണുന്നത്. വർഗ്ഗമൂലം, ഘനമൂലം എന്നീ സംജ്ഞകളും അക്കാലത്തു നിലവിലിരുന്നു. അവ്യക്തഘടകങ്ങളുടെ മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുന്നതിൽ അവ്യക്തഘടകങ്ങളും അക്കസംഖ്യകളും വേർതിരിച്ച് ഇരുവശത്തായി വിന്യസിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങൾക്ക് ഭാരതീയർ ഉപയോഗിച്ചിരുന്ന പേരുകളാണ്, സമീകരണം(ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ 628 എ.ഡി.) അഥവാ സമം, സാമ്യ, സദൃശീകരണം, (ശ്രീപതി 1039 എ.ഡി.), സമത്വം, (നാരായണൻ എ.ഡി.1350) തുടങ്ങിയവ. സമവാക്യത്തിന്റെ ഇരുവശത്തേയും സൂചിപ്പിക്കാൻ പക്ഷം എന്ന പേരും ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു. മൂല്യങ്ങൾ നിർവചിച്ചിട്ടുള്ള സംഖ്യകളെ ദൃശ്യം ക്ഷേപകം എന്നും മറ്റും വിളിച്ചിരുന്നു. കൂട്ടുക, കുറയ്ക്കുക, ഗുണിക്കുക, ഹരിക്കുക തുടങ്ങിയവയ്ക്ക് അർത്ഥദ്യോതകങ്ങളായ യുത, ക്ഷയ, ഗുണ, ഗുണിത, ഭാഗ, ഘാത, ഹാര, ഹൃത, ഉദ്ധൃത, സംശോധനം, വിശ്ലേഷണം മുതലായ സംസ്കൃതപദങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു. ന്യൂന (ഋണ) സംഖ്യകളെ തിരിച്ചറിയാൻ അവയ്ക്കു മുകളിൽ ബിന്ദുവോ ചെറിയ വൃത്തമോ ഇടുന്ന രീതി ഒരുപക്ഷേ ശൂന്യ ചിഹ്നവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കാമെന്നു തോന്നുന്നു.

പ്രൊഫസ്സർ അഭയങ്കർ ഇംഗ്ലീഷിൽ പരിഭാഷപ്പെടുത്തി പൂനെ ഭാസ്ക്കരാചാര്യ പ്രതിഷ്ഠാനം പ്രസിദ്ധീകരിച്ച ബീജഗണിതമാണ് ഈ പരിഭാഷക്ക് ആധാരമാക്കിയിട്ടുള്ളത്. ഉദ്ദേശകങ്ങൾക്ക് നിർദ്ധാരണവും കൃതിയിലെ ശ്ലോകങ്ങളിലെ സംസ്കൃത പദങ്ങൾക്ക് അർത്ഥവും ചേർത്താണ് ഈ പരിഭാഷ തയ്യാറാക്കിയത്. ഗണിതത്തിലും സംസ്കൃതഭാഷയിലും പരിഭാഷകനുള്ള മിതമായ അറിവ് മൂലം ഇതിൽ പ്രമാദങ്ങൾ കടന്നു കൂടിയിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ അനുവാചകർ സദയം ക്ഷമിക്കുമെന്നും തെറ്റുകൾ ചൂണ്ടിക്കാണിക്കുമെന്നും വിശ്വസിക്കുന്നു.

11 അദ്ധ്യായങ്ങളിലായി 65 കരണസൂത്രങ്ങളും 106 ഉദാഹരണങ്ങളും കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ധനഋണസംഖ്യകൾ, ശൂന്യം, വർണ്ണങ്ങൾ, കരണികൾ എന്നിവ ഉപയോഗിച്ചിട്ടുള്ള ആറുവിധ ഗണിതക്രിയകളാണ് ആദ്യത്തെ നാല് അദ്ധ്യായങ്ങളിലെ പ്രതിപാദ്യം ഏകഘാത അനിർധാര്യസമവാക്യങ്ങളുടെ കുട്ടക രീതിയിലുള്ള നിർധാരണമാണ് അഞ്ചാം അദ്ധ്യായത്തിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ളത്. ഇതു ലീലാവതിയിലും ഉൾകൊള്ളിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഭാസ്ക്കരാചാര്യരുടെ അമൂല്യമായ ഒരു സംഭാവനയാണ് ചക്രവാളരീതി.

ഇത് വർഗ്ഗപ്രകൃതി എന്ന ആറാം അദ്ധ്യായത്തിൽ വിവരിക്കുന്നു. ദ്വിഘാത സമവാക്യങ്ങളുടെ വിവിധ നിർധാരണ രീതികൾ തുടർന്നുള്ള അദ്ധ്യായങ്ങളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ഒരു അവ്യക്തഘടകം മാത്രമുള്ള സമവാക്യങ്ങളാണ് ഏകവർണ്ണ സമീകരണമെന്ന ഏഴാം അദ്ധ്യായത്തിലുള്ളത്. തുടർന്ന് അത്തരം വൈവിധ്യമുള്ള സമവാക്യനിർധാരണം മധ്യമാഹരണം (അതായത് മധ്യഘടകം ഒഴിവാക്കിയുള്ള ഗണിതക്രിയ)എന്ന എട്ടാം അദ്ധ്യായത്തിൽ വിസ്തരിക്കുന്നു. ഒന്നിലധികം അവ്യക്തഘടകങ്ങൾ ചേർന്ന സമവാക്യങ്ങൾ സംശോധനം ചെയ്യുന്ന പ്രക്രിയ ഒൻപതാം അദ്ധ്യായത്തിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. അത്തരം പ്രശ്ന ങ്ങളിലെ മധ്യ ഘടകം ഒഴിവാക്കിയുള്ള ക്രിയകൾ അനേക വർണ്ണ സമീകരണ അന്തർഗതമധ്യമാഹരണമെന്ന പത്താം അദ്ധ്യായത്തിൽ പ്രതിപാദിക്കുന്നു.

രണ്ട് അവ്യക്തഘടകങ്ങളുടെ ഗുണിതമാണ് ഭാവിതം എന്നു പറയുന്നത്. അത്തരം ഘടകങ്ങളടങ്ങുന്ന സമീകരണങ്ങൾ പ്രതിപാദിക്കുന്ന ഭാവിതം എന്നു പേരുള്ള പതിനൊന്നാം അദ്ധ്യായത്തെ തുടർന്ന് ഗ്രന്ഥസമാപ്തിയായി ഏതാനും ശ്ലോകങ്ങളും ഈ ഗ്രന്ഥത്തിൽ ഉൾകൊള്ളിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഗണിതശാസ്ത്രകുതുകികൾക്ക് ആലോചനാവിഷയം ഈ ഗ്രന്ഥം പ്രദാനം ചെയ്യുന്നുണ്ട്. 850 വർഷങ്ങൾക്കുമുമ്പ് രചിക്കപ്പെട്ട ഈ ഗ്രന്ഥം ഭാരതീയ വിജ്ഞാനമേഖലയുടെ ആഴവും പരപ്പും വ്യക്തമാക്കുന്നു. വിജ്ഞാനത്തിന്റെ ഔന്നത്യത്തിലേക്കു ഭാരതത്തെ നയിച്ച ചിരസ്മരണീയരായ പൂർവ്വാചാര്യന്മാരുടെ പാദാരവിന്ദങ്ങളിൽ ഈ ഉപഹാരം ആദാരപൂർവ്വം സമർപ്പിച്ചു കൊള്ളുന്നു.

എന്ന്

ഡോ. വി. ബി. പണിക്കർ

ബീജഗണിതം

വന്ദനം

ഉൽപാദകം യത് പ്രവദന്തി ബുദ്ധേർ
അധിഷ്ഠിതം സത്പുരുഷേണ സാംഖ്യാഃ
വ്യക്തസ്യ കൃത്സ്നസ്യ തദേക ബീജം
അവ്യക്തം ഈശം ഗണിതം ച വന്ദേ.

അർത്ഥം

ഉൽപാദകം = ഉളവാകുന്നത്, യത് = യാതൊന്ന്, പ്രവദന്തി = പറയുന്നു. കൃത്സ്നം = കഠിനമായത്.

സാരം

യാതൊന്ന് ബുദ്ധിശക്തിയിൽ അധിഷ്ഠിതവും വ്യക്തവും അറിയാൻ വിഷമമേറിയതും അവ്യക്തവും ആണെന്ന് സൽപുരുഷന്മാരാൽ പ്രകീർത്തിക്കപ്പെട്ടതാണോ അത് ലോകത്തിനു ബീജാധാരമാകുന്നു. ആ അവ്യക്തനായ ഈശ്വരനേയും ബീജഗണിതത്തിനേയും ഞാൻ നമിക്കുന്നു.

ഇവിടെ ഈശ്വരനേയും ഗണിതത്തേയും താരതമ്യപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. രണ്ടും വ്യക്തവും എന്നാൽ അവ്യക്തവുമാണ്. അറിയുവാൻ ബുദ്ധിമുട്ടുള്ളവയും ചിന്താശക്തിക്ക് ആധാരവുമാണ് അവ.

പൂർവ്വംപ്രോക്തം വ്യക്തം അവ്യക്തബീജം
പ്രായഃ പ്രശ്നാനോ വിനാ*f*വ്യക്തയുക്ത്യാ
ജ്ഞാതും ശക്യാ മന്ദധീഭിർ നിതാന്തം
യസ്മാത് തസ്മാത് വച്മി ബീജക്രിയാം ച.

അർത്ഥം

പൂർവ്വംപ്രോക്തം = മുമ്പു പറഞ്ഞത്, വ്യക്തം = അങ്കഗണിതം, പ്രായഃ = സാമാന്യമായി, പ്രശ്നാൻ നോ വിനാ അവ്യക്തയുക്ത്യാ = അവ്യക്തയുക്തി (ബീജഗണിതം) ഉപയോഗിക്കാതെ പ്രശ്നങ്ങൾ (അറിയാൻ) സാധ്യമല്ല. ജ്ഞാതും = അറിയുക, ശക്യം = കഴിയുന്നത്, മന്ദധീ = മന്ദബുദ്ധികൾ.

സാരം

അവ്യക്തഗണിതത്തിന് അടിസ്ഥാനമായ അങ്കഗണിതം മുമ്പ് വിവരിച്ചു **(ലീലാവതിയിൽ)**. അവ്യക്തിയുക്തി ഉപയോഗിക്കാതെ പ്രശ്നങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കാൻ ബുദ്ധികുറഞ്ഞവർക്ക് എപ്പോഴും പ്രയാസമാണ്. ആ ബീജഗണിതക്രിയ ഞാൻ വിവരിക്കാം.

ഭാസ്ക്കരാചാര്യന്റെ സിദ്ധാന്തശിരോമണിയുടെ ആദ്യ ഭാഗമാണ് ലീലാവതി എന്ന ഗണിതഭാഗം. രണ്ടാമത്തെ ഭാഗമാണ് ബീജഗണിതം, മൂന്നും നാലും ഭാഗങ്ങൾ യഥാക്രമം, ഗ്രഹഗണിതം, ഗോളാധ്യായം എന്നിവയാണ്.

അദ്ധ്യായം 1

ധനഋണ ഷഡ് വിധം

ധനസംഖ്യകളും ഋണ(ന്യൂന) സംഖ്യകളും **(Positive and Negative numbers)** ഉപയോഗിച്ചുള്ള ഗണിതക്രിയകൾ ഇവിടെ വിവരിക്കുന്നു. സങ്കലനം, വ്യവകലനം, ഗുണനം, ഹരണം, വർഗ്ഗം, വർഗ്ഗമൂലം എന്നിവയാണ് മുഖ്യമായ ആറുവിധ ഗണിതക്രിയകൾ, ന്യൂനധനസംഖ്യകൾക്കു വരുത്തേണ്ട മാറ്റങ്ങൾ ഈ അധ്യായത്തിൽ സംക്ഷിപ്തമായി ചർച്ച ചെയ്യുന്നു.

(a) സങ്കലനം (Addition)

കരണസൂത്രം 1

യോഗേ യുതിഃ സ്യാൽ ക്ഷയയോ സ്വയോർ വാ
ധനർണ്ണയോരന്തരമേവ യോഗഃ ।

അർത്ഥം

യോഗേ യുതിഃ=രണ്ടു സംഖ്യകൾ കൂട്ടുമ്പോൾ, ക്ഷയയോ സ്വയോ=ന്യൂനസംഖ്യയോ ധനസംഖ്യയോ, ധനർണ്ണം=ധനഋണം (ധനന്യൂനം), അന്തരം=വ്യത്യാസം, യോഗഃ=സങ്കലനം.

സാരം

രണ്ടു ധനസംഖ്യകൾ തമ്മിലോ രണ്ടു ന്യൂനസംഖ്യകൾ തമ്മിലോ കൂട്ടുമ്പോൾ അവയുടെ തുക (ധന, ന്യൂന സംഖ്യകളായി) ലഭിക്കുന്നു. ധനസംഖ്യയും ന്യൂനസംഖ്യയും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം തന്നെയാണ് അവ കൂട്ടുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്നത്.

രണ്ടു ധനസംഖ്യകളുടെ യോഗം ധനസംഖ്യയും രണ്ടു ന്യൂനസംഖ്യകളുടെ യോഗം ന്യൂനസംഖ്യയുമായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 1

രൂപത്രയം രൂപചതുഷ്ടയം ച
ക്ഷയം ധനം വാ സഹിതം വദാശു
സ്വർണ്ണേ ക്ഷയഃ സ്വം ച പൃഥക് പൃഥക് മേ
ധനർണ്ണയോഃ സങ്കലനാമവൈഷി.

അർത്ഥം

രൂപത്രയം = 3, രൂപചതുഷ്ടയം = 4, സഹിതം = കൂട്ടിയത്, പൃഥക് പൃഥക് = വെവ്വേറെ, അവൈഷി = അറിയുന്നവൻ.

സാരം

3,4 എന്നിവ ന്യൂനസംഖ്യകളോ ധനസംഖ്യകളോ ആയാൽ അവ കൂട്ടിയത് എത്രയെന്നു വേഗം പറയുക.

അവ ധനം, ന്യൂനം അഥവാ ന്യൂനം, ധനം എന്ന ക്രമത്തിലായാൽ, ധന ന്യൂന സംഖ്യകളുടെ സങ്കലനക്രിയ അറിയുമെങ്കിൽ കൂട്ടിയഫലം വെവ്വേറെ പറയുക.

സംഖ്യകൾ **3,4**

(a) രണ്ടും ധന സംഖ്യകളായാൽ
3+4 =7 (ധന സംഖ്യ)

(b) രണ്ടും ന്യൂന സംഖ്യകളായാൽ
-3 + -4 = -7 (ന്യൂന സംഖ്യ)

(c) ധന – ന്യൂന സംഖ്യകളായാൽ
3+(-4) = -1 (ന്യൂന സംഖ്യ)

(d) ന്യൂന – ധന സംഖ്യകളായാൽ
-3 + 4 = 1 (ധന സംഖ്യ)

കരണസൂത്രം 2

അത്ര രൂപാണാം അവ്യക്താനാം ച
ആദ്യാക്ഷരാണി ഉപലക്ഷണാർഥം ലേഖ്യാനി
തഥാ യാ ന്യൂനഗതാനി താനി
ഊർധ്വ ബിന്ദൂനി ചേതി – ഏവം ഭിന്നേഷ്വപി.

അർത്ഥം

രൂപാണാം = ദൃഢസംഖ്യകൾ(**constant**), അവ്യക്തനാം = അജ്ഞാത സംഖ്യകൾ, ആദ്യക്ഷരാണി = അക്ഷരമാലയിൽ ആദ്യാക്ഷരങ്ങൾ, ഉപലക്ഷണാർത്ഥം = തിരിച്ചറിയുന്നതിന്, ലേഖ്യാനി = ചിഹ്നങ്ങൾ ഇടുക, ന്യൂനഗതാനി = ന്യൂന സംഖ്യകൾ, ഊർധ്വ ബിന്ദു = മുകളിൽ ഇടുന്ന ബിന്ദു, ചേതി = ച ഇതി = ഇപ്രകാരം, ഭിന്നേഷു = ഭിന്നസംഖ്യകളിൽ.

സാരം

ഇവിടെ ദൃഢസംഖ്യകളും അജ്ഞാത സംഖ്യകളും തിരിച്ച

റിയാൻ അവ്യക്തസംഖ്യകൾക്ക് അക്ഷരസംജ്ഞകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. അതുപോലെ ന്യൂനസംഖ്യകൾ തിരിച്ചറിയാൻ അവയ്ക്കു മുകളിൽ ബിന്ദു ഇടുന്നു. ഇതു ഭിന്ന സംഖ്യകൾക്കും ബാധകമാണ്. അവ്യക്തസംഖ്യകൾക്ക് ബീജഗണിതത്തിൽ അക്ഷര സംജ്ഞകളാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. (ഇവിടെ സൗകര്യാർത്ഥം ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്).

(b) വ്യവകലനം (Subtraction)

കരണസൂത്രം 3

സംശോധ്യമാനം സ്വ മൃണത്വമേതി
സ്വത്വം ക്ഷയ: തദ് യുതിരുക്തവൽ ച

അർത്ഥം

സംശോധ്യമാനം = കുറയ്ക്കേണ്ട സംഖ്യ, സ്വംഋണത്വമേതി = ധനസംഖ്യക്ക് ന്യൂനത്വം എന്ന പോലെ. സ്വത്വം ക്ഷയം = ന്യൂന സംഖ്യക്ക് ധനത്വം നൽകി, തദ്യുതി = അവയുടെ തുക (സങ്കലനം)

സാരം

കുറയ്ക്കേണ്ട സംഖ്യ ധനസംഖ്യയാണെങ്കിൽ അതിന് ന്യൂനത്വവും ന്യൂന സംഖ്യയാണെങ്കിൽ ധനത്വവും നൽകി അവയുടെ തുക മുമ്പു പ്രസ്താവിച്ച പ്രകാരം കാണുക.

ഉദാഹരണം 2

ത്രയാദ് ദ്വയം സ്വാത് സ്വം ഋണാൽ ഋണം ച
വ്യസ്തം ച സംശോധ്യ വദാശു ശേഷം

അർത്ഥം

ത്രയാദ് = മുന്നിൽനിന്ന്, ദ്വയം = 2, സ്വാത്സ്വം = ധന സംഖ്യയിൽ നിന്നു ധനസംഖ്യ; ഋണാൽഋണം = ന്യൂനസംഖ്യയിൽ നിന്നും ന്യൂനസംഖ്യ; വ്യസ്തം = വിപരീതമായി; സംശോധ്യ = കുറച്ച് ശേഷം = ഫലം (ശിഷ്ടം).

സാരം

3,2 എന്നീ സംഖ്യകൾ ധനത്തിൽ നിന്നും ധനം എന്ന പോലെയും ന്യൂനത്തിൽ നിന്നും ന്യൂനം എന്ന പോലെയും വിപരീതമായും കുറച്ച ഫലം വേഗം പറയുക.

വ്യവകലനം

(a) രണ്ടും ധന സംഖ്യകൾ
3-2=1

(b) രണ്ടും ന്യൂന സംഖ്യകൾ
-3 - (-2) = -3+2 = -1

(c) ധന ന്യൂന സംഖ്യകൾ
3 -(-2) = 5

(d) ന്യൂന ധന സംഖ്യകളായാൽ
-3-2= -5 (ന്യൂനസംഖ്യ)

(C) ഗുണനം (Multiplication)

കരണസൂത്രം 4

സ്വയോരസ്വയോ: സ്വം വധഃ
സ്വർണ്ണഘ്നാതേ ഫലം ക്ഷയഃ

അർത്ഥം

സ്വയോരസ്വയോ: = ധനസംഖ്യകളോ ന്യൂനസംഖ്യകളോ ആയാൽ, സ്വർണ്ണഘ്നാതേ = ധനന്യൂനസംഖ്യകൾ ഗുണിക്കുമ്പോൾ

സാരം

രണ്ടു ധനസംഖ്യകളുടെയോ രണ്ടു ന്യൂനസംഖ്യകളുടെയോ ഗുണനഫലം ധനസംഖ്യയാകുന്നു. ഒരു ധനസംഖ്യയും ഒരു ന്യൂനസംഖ്യയും ഗുണിച്ച ഫലം ന്യൂനസംഖ്യയാകുന്നു.

ധനസംഖ്യ × ധനസംഖ്യ = ധനസംഖ്യ
ന്യൂനസംഖ്യ × ന്യൂനസംഖ്യ = ധനസംഖ്യ
ധനസംഖ്യ × ന്യൂനസംഖ്യ = ന്യൂനസംഖ്യ

ഉദാഹരണം 3

ധനം ധനേന ഋണം ഋണേന നിഘ്നം
ദ്വയം ത്രയേണ സ്വമൃണേന കിം സ്യാൽ

അർത്ഥം

ദ്വയം ത്രയേണ = രണ്ടിനെ മൂന്നുകൊണ്ട്, സ്വം ഋണേന = ധനസംഖ്യയെ ന്യൂനസംഖ്യകൊണ്ട്.

സാരം

2 നെ മൂന്നുകൊണ്ട് ധനസംഖ്യയെ ധനസംഖ്യകൊണ്ട് എന്ന പോലെയും, ന്യൂനസംഖ്യയെ ന്യൂനസംഖ്യ കൊണ്ട് എന്ന

പോലെയും ധനസംഖ്യയെ ന്യൂനസംഖ്യകൊണ്ട് എന്ന പോലെയും ഗുണിച്ച ഫലങ്ങൾ എത്ര?

സംഖ്യകൾ **2,3**

(a) $(+2) \times (+3) = +6$ (ധനസംഖ്യ)

$(-2) \times (-3) = +6$ (ധനസംഖ്യ)

$2 \times (-3) = -6$ (ന്യൂനസംഖ്യ)

(d) ഹരണം (Division)

കരണസൂത്രം 5

ഭാഗഹാരേfപി ചൈവം നിരുക്തം

അർത്ഥം

ഭാഗഹാരം = ഹരണം, നിരുക്തം = നിയമം

സാരം

ഹരണക്രിയയിലും ഇതേ നിയമം ബാധകമാണ്. **(2** ധന സംഖ്യകളുടെയോ **2** ന്യൂനസംഖ്യകളുടെയോ ഹരണഫലം ധനസംഖ്യയും ഒരു ധനസംഖ്യയുടെയും ഒരു ന്യൂനസംഖ്യയുടെയും ഹരണഫലം ന്യൂനസംഖ്യയുമായിരിക്കും.)

ഉദാഹരണം 4

രൂപാഷ്ടകം രൂപചതുഷ്ടയേന
ധനം ധനേന, ഋണം ഋണേന ഭക്തം
ഋണം ധനേന സ്വം ഋണേന കിം സ്യാൽ
ദ്രുതം വദേദം യദി ബോബധീഷി.

അർത്ഥം

രൂപാഷ്ടകം = **8,** രൂപചതുഷ്ടയം = **4,** ഭക്തം = ഹരിച്ചത്

സാരം

8 നെ **4** കൊണ്ട് ധനസംഖ്യയെ ധനസംഖ്യകൊണ്ട് എന്ന പ്രകാരത്തിലും, ന്യൂനസംഖ്യയെ ന്യൂനസംഖ്യകൊണ്ട് എന്ന വിധത്തിലും, ന്യൂനസംഖ്യയെ ധനസംഖ്യകൊണ്ട് എന്ന പോലെയും, ധനസംഖ്യയെ ന്യൂനസംഖ്യകൊണ്ട് എന്ന വിധത്തിലും ഹരിച്ചാൽ ഫലം എത്രയാകുമെന്ന് സമർത്ഥനെങ്കിൽ വേഗം പറയുക.

സംഖ്യകൾ 8,4 എന്നിവ

(a) ധനസംഖ്യയെ ധനസംഖ്യകൊണ്ട് ഹരണം
$8 \div 4 = 2$ (ധനസംഖ്യ)

(b) ന്യൂനസംഖ്യയെ ന്യൂനസംഖ്യകൊണ്ട്
$-8 \div -4 = 2$ (ധനസംഖ്യ)

(c) ന്യൂനസംഖ്യയെ ധനസംഖ്യകൊണ്ട്
$-8 \div 4 = -2$ (ന്യൂനസംഖ്യ)

(d) ധനസംഖ്യയെ ന്യൂനസംഖ്യകൊണ്ട്
$8 \div -4 = -2$ (ന്യൂനസംഖ്യ)

(e) വർഗ്ഗം, വർഗ്ഗമൂലം

കരണസൂത്രം 6

കൃതിഃ സ്വർണ്ണയോഃ സ്വം സ്വമൂലേ ധനർണ്ണേ
നമൂലം ക്ഷയസ്യാസ്തി തസ്യാകൃതിത്വാൽ

അർത്ഥം

കൃതി = വർഗ്ഗം, സ്വർണ്ണയോ = ധനസംഖ്യയുടെയോ ന്യൂനസംഖ്യയുടെയോ, സ്വം = ധനസംഖ്യ, സ്വമൂലേ = ധനസംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലം, ധനർണ്ണേ = ധനസംഖ്യയും ന്യൂന സംഖ്യയും, നമൂലം ക്ഷയസ്യ അസ്തി = ന്യൂനസംഖ്യയ്ക്ക് വർഗ്ഗമൂലം ഇല്ല, തസ്യാകൃതിത്വം = തസ്യ അകൃതിത്വം = അതിന്റെ അവർഗ്ഗസ്വഭാവം.

സാരം

ധനസംഖ്യയുടെയോ ന്യൂനസംഖ്യയുടെയോ വർഗ്ഗം ധന സംഖ്യയാകുന്നു. ധനസംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലം ധനസംഖ്യയും ന്യൂനസംഖ്യയുമാകാം. ന്യൂനസംഖ്യയ്ക്ക് വർഗ്ഗമൂലം ഉണ്ടാകില്ല. അതിന്റെ അവർഗ്ഗ സ്വഭാവമാണ് ഇതിനു കാരണം.

ഉദാഹരണം 5

ധനസ്യ രൂപത്രിതയസ്യ വർഗ്ഗം
ക്ഷയസ്യ ച ബ്രൂഹി സഖേ മമാ*f*ശൂ
ധനാത്മകാനാം അധനാത്മകാനാം
മൂലം നവാനാം ച പൃഥക് വദാ*f*ശൂ

അർത്ഥം

ധനസംഖ്യയായ 3 ന്റെ വർഗ്ഗം, ന്യൂനസംഖ്യയായ 3 ന്റെ വർഗ്ഗം, എന്നിവ ഹേ, സഖേ, എന്നോടു വേഗം പറയുക, ധന

രൂപവും ന്യൂനരൂപവുമായ 9 ന്റെ വർഗ്ഗമൂലവും വെവ്വേറെ വേഗം പറയുക.

(a) +3 ന്റെ വർഗ്ഗം = +9 (ധനസംഖ്യ)

(b) -3 ന്റെ വർഗ്ഗം = +9 (ധനസംഖ്യ)

(c) +9 ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം = +3 അഥവാ -3

(d) -9 ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം ലഭ്യമല്ല, കാരണം; -9 ഒരു വർഗ്ഗ സംഖ്യയല്ല.

അദ്ധ്യായം 2

ശൂന്യ ഷഡ് വിധം

പൂജ്യം ഉപയോഗിച്ചുള്ള 6 വിധ ക്രിയകൾ ഇവിടെ വിവരിക്കുന്നു.

കരണസൂത്രം 7

ഖയോഗേ വിയോഗേ ധനർണ്ണം തഥൈവ
ച്യുതം ശൂന്യതഃ തദ് വിപര്യാ സമേതി
വധാദൗ വിയത് ഖസ്യ ഖം ഖേന ഘാതേ
ഖഹാരോ ഭവേത് ഖേനഭക്തഃ ച രാശിഃ

അർത്ഥം

ഖയോഗേ = പൂജ്യം കൂട്ടുമ്പോൾ, വിയോഗേ = കുറയ്ക്കുമ്പോൾ, ച്യുതം ശൂന്യതഃ = പൂജ്യത്തിൽ നിന്നും കുറച്ചത്, വിപര്യാ = വിപരീത ചിഹ്നം; ഖേന ഘാതേ = പൂജ്യം കൊണ്ടു ഗുണിക്കുമ്പോൾ; ഖേന ഭക്തഃ = പൂജ്യംകൊണ്ടു ഹരിച്ചത്. ഖഹാരം = അനന്ത സംഖ്യ **(Infinity)**

സാരം

പൂജ്യം കൂട്ടിയാലും കുറച്ചാലും ധനന്യൂനസംഖ്യകൾക്കു മാറ്റമില്ല പൂജ്യത്തിൽ നിന്നും കുറച്ചസംഖ്യയുടെ ചിഹ്നം വിപരീതമാകുന്നു. പൂജ്യത്തെ ഒരു സംഖ്യകൊണ്ടോ മറിച്ച് ഒരു സംഖ്യയെ പൂജ്യം കൊണ്ടോ ഗുണിച്ചാൽ ഫലം പൂജ്യം തന്നെ. ഒരു സംഖ്യയെ പൂജ്യം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം ഖഹാരം **(Infinity)** ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 6

രൂപത്രയം സ്വം ക്ഷയഗം ച ഖം ച
കിം സ്യാൽ ഖയുക്തം വദ ഖച്യുതം ച
ദ്വിഘ്നം ത്രിഹൃത് ഖം ഖഹൃതം ത്രയം ച
ശൂന്യസ്യ വർഗം വദമേ പദം ച

അർത്ഥം

സ്വം ക്ഷയഗം = ധന ന്യൂനത്വം, ദ്വിഘ്നം = **2** കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്, ത്രിഹൃത് ഖം = പൂജ്യത്തെ **3** കൊണ്ടു ഹരിച്ചത്, പദം =വർഗ്ഗമൂലം

സാരം

ധനസംഖ്യയോ ന്യൂനസംഖ്യയോ ആയ മൂന്നിനോടും പൂജ്യത്തിനോടും പൂജ്യം കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്ത ഫലം എത്ര?

പൂജ്യത്തെ 2 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിന്റെയും മൂന്നുകൊണ്ടു ഹരിച്ചതിന്റെയും മൂന്നിനെ പൂജ്യം കൊണ്ട് ഹരിച്ചതിന്റെയും ഫലങ്ങളും, ശൂന്യത്തിന്റെ വർഗ്ഗവും വർഗ്ഗമൂലവും എന്നോടു പറയുക.

a) $+3 + 0 = +3$
b) $-3 + 0 = -3$
c) $0 + 0 = 0$
d) $0 \times 2 = 0$
e) $0 \div 3 = 0$
f) $3 \div 0 =$ ഖഹരം
g) $0 \times 0 = 0$
h) $\sqrt{0} = 0$

<u>ഖഹാരസ്വരൂപം</u>

കരണസൂത്രം 8

അസ്മിൻ വികാരഃ ഖഹരേണ രാശാ
വപി പ്രവിഷ്ടേഷ്വപി നിഃസൃതേഷു
ബഹുഷ്വപി സ്യാൽ ലയസൃഷ്ടികാലേ
നന്തോ*f*ച്യുതേ ഭുതഗണേഷു യദ്വൽ

അർത്ഥം

അസ്മിൻ വികാരഃ = ഇതിന്റെ സ്വഭാവം, പ്രവിഷ്ടേഷു = പ്രവേശിക്കുമ്പോൾ (ലയിക്കുമ്പോൾ), നിസൃതേഷു = നിർഗ്ഗമിക്കുമ്പോൾ

സാരം

ഖഹരത്തോടു സംഖ്യകൾ കൂട്ടുമ്പോഴും ഖഹരത്തിൽ നിന്നു സംഖ്യകൾ കുറയ്ക്കുമ്പോഴും അതിന്റെ മൂല്യത്തിനു (സ്വഭാവത്തിന്) മാറ്റം സംഭവിക്കുന്നില്ല.

ലയസൃഷ്ടി കാലങ്ങളിൽ അനന്തനായ അച്യുതനോടു അനേകം ഭൂതഗണങ്ങൾ (ചേരുമ്പോൾ) ലയിക്കുമ്പോഴോ അച്യുതനിൽ നിന്നു (സൃഷ്ടിക്കപ്പെട്ട്) ബഹിർഗമിക്കുമ്പോഴോ അച്യുതന് മാറ്റങ്ങളൊന്നും സംഭവിക്കാത്തതുപോലെയാണിത്.

ഖഹരവും അച്യുതനും അനന്തമാണ്

ഖഹരം + സംഖ്യ = ഖഹരം
ഖഹരം - സംഖ്യ = ഖഹരം

അദ്ധ്യായം 3

വർണ്ണ ഷഡ് വിധം

ബീജഗണിത സംഖ്യകളുടെ ആറുവിധ ഗണിതക്രിയകൾ വിവരിക്കുന്നു. ബീജഗണിത ചിഹ്നത്തെ വർണ്ണം (നിറം) എന്നു പറയുന്നു. യാവത്, താവത്, കാലകം, നീലകം, പീതം തുടങ്ങിയ വർണ്ണങ്ങൾ ബീജഗണിത സംജ്ഞകളായി ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു.

കരണസൂത്രം 9

യാവത് താവത് കാലകോ നീലകോ*f*ന്യോ
വർണ്ണഃ പീതോ ലോഹിത: ച ഏതദാദ്യാഃ
അവ്യക്താനാം കൽപിതാ മാനസംജ്ഞാ
തൽ സംഖ്യാനാം കർതൃം ആചാര്യ വര്യൈഃ

അർത്ഥം

കാലകം = കറുപ്പുനിറം, നീലകം = നീലനിറം, പീതം = മഞ്ഞ നിറം, ലോഹിതം = താമ്രവർണ്ണം, മാനസംജ്ഞ = മൂല്യം സൂചിപ്പിക്കുന്ന അടയാളം

സാരം

അവ്യക്തസംഖ്യകളുടെ മൂല്യം സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന് യാവത്, താവത്, കാലകം, നീലകം, പീതം, ലോഹിതം എന്നിങ്ങനെയുള്ള വർണ്ണങ്ങൾ ആചാര്യശ്രേഷ്ഠന്മാർ നിർദ്ദേശിച്ചിട്ടുണ്ട്.

യാ, കാ, നീ, പീ, ലോ തുടങ്ങിയ അക്ഷരസംജ്ഞകളും മറ്റു അക്ഷരങ്ങളും അജ്ഞാത സംഖ്യകൾ സൂചിപ്പിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

(ഇവിടെ ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരങ്ങൾ ഇവയ്ക്കു പകരമായി ഉപയോഗിക്കുന്നു)

കരണസൂത്രം 10

യോഗോ*f*ന്തരം തേഷു സമാന ജാത്യോർ
വിഭിന്നജാത്യോഃ ച പൃഥക് സ്ഥിതിഃ ച

അർത്ഥം

യോഗോ*f*ന്തരം = കൂട്ടലും കുറയ്ക്കലും, തേഷു = അവയുടെ, സമാനജാതി = ഒരേ വർണ്ണത്തിലുള്ളവ

സാരം

സമ ജാതിയിലുള്ള ഘടകങ്ങൾ കൂട്ടുകയും കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്യാം. വിഭിന്ന ജാതികളായ ഘടകങ്ങൾ വെവ്വേറെ കണക്കാക്കുന്നു.

$5x^2, 7x^2, 10x^2$ എന്നിവ സമജാതികളാണ്, അവയെ കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്യാം. $5x^2, 7x, 3y$ എന്നിവ വിഭിന്ന ജാതികളാണ് അവ വെവ്വേറെ തന്നെ നിലനിർത്തണം.

ഉദാഹരണം 7

സ്വം അവ്യക്തമേകം സഖേ സൈക രൂപം
ധനാവ്യക്തയുഗ്മം വിരൂപാഷ്ടകം ച
യുതൌ പക്ഷ യോരേതയോഃ കിം ധനർണ്ണേ
വിപര്യസ്യ ചൈവ യേ ഭവേത് കിം വദാfശു

അർത്ഥം

സ്വം അവ്യക്തം ഏകം = ഒരു അവ്യക്തധനസംഖ്യ $(+1x)$ സൈകരൂപം = ഒന്നുകൂട്ടിയത്, ധനാവ്യക്തയുഗ്മം = അവ്യക്ത ധനസംഖ്യയുടെ ഇരട്ടി $(+2x)$, വിരൂപാഷ്ടകം = 8 കുറച്ചത്, യുതൌ = കൂട്ടിയത്, പക്ഷയോരേതയോ = ഈ സംഖ്യകളിൽ

സാരം

ഒരു അവ്യക്ത ധനസംഖ്യയോട് ഒന്നു കൂട്ടിയതും, അവ്യക്ത ധനസംഖ്യയുടെ രണ്ടിരട്ടിയിൽനിന്നു 8 കുറച്ചതും, കൂട്ടിയാൽ ഫലം എത്ര?

ഈ സംഖ്യകളിൽ ധനന്യൂനചിഹ്നങ്ങൾ വിപരീതമായാൽ ഇവയുടെ സങ്കലന ഫലം എന്താകുമെന്നു വേഗം പറയുക.

സംഖ്യകൾ $+x+1$, $+2x-8$
ഇവ കൂട്ടിയത് = $+3x-7$
അവ്യക്ത സംഖ്യകളുടെ ചിഹ്നം മാറ്റിയാൽ
$-x+1$ $-2x-8$ ഇവ കൂട്ടയത് = $-3x-7$

ഉദാഹരണം 8

ധനാവ്യക്ത വർഗ്ഗത്രയം സത്രിരൂപം
ക്ഷയാവ്യക്തയുഗ്മേന യുക്തം ച കിം സ്യാൽ

അർത്ഥം

ധനാവ്യക്തവർഗ്ഗത്രയം = ഒരു അവ്യക്ത സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗത്തിന്റെ മൂന്നിരട്ടി, സത്രിരൂപം = 3 കൂട്ടിയത്, ക്ഷയാവ്യക്ത യുഗ്മം = അവ്യക്ത ന്യൂനസംഖ്യയുടെ ഇരട്ടി.

സാരം

ധന അവ്യക്ത വർഗ്ഗത്തിന്റെ മൂന്നിരട്ടിയോടു 3 കൂട്ടിയതും, ന്യൂന അവ്യക്ത സംഖ്യയുടെ ഇരട്ടിയും കൂട്ടിയാൽ എത്രയാകുന്നു.

അവ്യക്തസംഖ്യ $= x$
ഘടകങ്ങൾ $+3x^2 + 3, -2x$
ഇവ കൂട്ടിയത് $3x^2 - 2x + 3$
അസമാന ഘടകങ്ങൾ വെവ്വേറെ നിലനിർത്തണം

ഉദാഹരണം 8 തുടർച്ച

ധനാവ്യക്ത യുഗ്മാദ് ഋണാവ്യക്തഷട്കം
സരൂപാഷ്ടകം പ്രോജ്ഝ്യ ശേഷം വദാ*f*ശു

അർത്ഥം

പ്രോജ്ഝ്യ = കുറച്ചത്, അവ്യക്തയുഗ്മം = അവ്യക്ത സംഖ്യയുടെ ഇരട്ടി, ഷട്കം = 6, സരൂപാഷ്ടകം = 8 കൂട്ടിയത്.

സാരം

അവ്യക്ത ധനസംഖ്യയുടെ രണ്ടിരട്ടിയിൽ നിന്നും ന്യൂന അവ്യക്തസംഖ്യയുടെ 6 ഇരട്ടിയും 8-ം ചേർത്ത സംഖ്യ കുറച്ച ശിഷ്ടം എത്രയെന്നു വേഗം പറയുക.

$+2x$ ൽ നിന്നും $-6x + 8$ കുറയ്ക്കണം.

കുറയ്ക്കേണ്ട സംഖ്യയുടെ ചിഹ്നം വിപരീതമാക്കി സംഖ്യകൾ കൂട്ടണം.

$2x + 6x - 8 = 8x - 8$

കരണസൂത്രം 11

സ്യാദ് രൂപ വർണ്ണാഭിഹതൗതു വർണ്ണോ
ദ്വിത്ര്യാദികാനാം സമജാതികാനാം
വധേതു തദ് വർഗ്ഗ ഘനാദയഃ സ്യുഃ
തദ് ഭാവിതം ചാസമജാതിഘാതേ
ഭാഗാദികം രൂപവദേവ ശേഷം
വ്യക്തേ യദുക്തം ഗണിതേ തദത്ര

അർത്ഥം

രൂപ വർണ്ണാഭിഹതി = അക്കങ്ങളും അവ്യക്തസംഖ്യയും ഗുണിച്ചത്, ദ്വിത്ര്യാദികാനാം വധം = രണ്ടോ മൂന്നോ പ്രാവശ്യം

ഗുണിച്ചത്, അസമജാതിഘാതം = അസമജാതികൾ ഗുണിച്ചത്, ഭാഗാദികം = ഹരണം തുടങ്ങിയവ, ഭാവിതം = അസമജാതികളുടെ ഗുണിതം, രൂപവദേവ = സംഖ്യകൾ പോലെ, വ്യക്തം = അങ്കഗണിതം.

സാരം

അക്കസംഖ്യയും അവ്യക്തഘടകവും ഗുണിച്ചത് അവ്യക്ത സംഖ്യയാകുന്നു. സമജാതിഘടകങ്ങൾ രണ്ടോ മൂന്നോ പ്രാവശ്യം തമ്മിൽ ഗുണിച്ചാൽ അവയുടെ വർഗ്ഗങ്ങളും ഘനങ്ങളും മറ്റും ലഭിക്കുന്നു. അസമജാതികളായ അവ്യക്തസംഖ്യകളുടെ ഗുണിതത്തെ ഭാവിതം എന്നു പറയുന്നു. അവ്യക്തസംഖ്യകളുടെ ഹരണം അങ്കഗണിതത്തിൽ അക്കങ്ങളുടെ കാര്യത്തിൽ പറഞ്ഞി ട്ടുള്ളതു പോലെ തന്നെയാകുന്നു.

$x \times x = x^2$

$x \times x \times x = x^3$

$x \times y = xy$ (ഭാവിതം)

കരണസൂത്രം 12

ഗുണ്യം പൃഥക് ഗുണകഖണ്ഡസമോ നിവേശ്യ
തദ് ഖണ്ഡകൈഃ ക്രമഹതൈഃ സഹിതോ യഥോക്ത്യാ
അവ്യക്തവർഗ്ഗകരണീഗുണനാസു ചിന്ത്യോ
വ്യക്തോക്ത ഖണ്ഡ ഗുണനാ വിധിരേവം അത്ര

അർത്ഥം

ഗുണ്യം = ഗുണിക്കപ്പെടേണ്ടത് (multiplicant), ഗുണകം = ഗുണിക്കേണ്ടത് (multiplier), തൈഃ = അവയെ, സഹിതം = കൂട്ടിയത്, കരണി = വർഗ്ഗമൂലചിഹ്നത്തിലുള്ള സംഖ്യ; വ്യക്തോക്ത = വ്യക്തഗണിതത്തിൽ പറഞ്ഞത്, ക്രമഹതഃ = ക്രമമായി ഗുണിക്കുക.

സാരം

ഗുണ്യത്തെ ഗുണകത്തിലെ ഖണ്ഡങ്ങളോളം സ്ഥാനത്തു വച്ച്, ഗുണക ഖണ്ഡങ്ങൾ കൊണ്ട് ക്രമമായി ഗുണിച്ച് നിർദ്ദേശിച്ചിരിക്കുന്ന പ്രകാരം കൂട്ടുക. (ഖണ്ഡങ്ങൾ കൊണ്ട് ഗുണിക്കുന്നതാണ് ഖണ്ഡ ഗുണനം)

അവ്യക്തസംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെയും കരണികളുടെയും ഗുണനവും ഇപ്രകാരം തന്നെ, ഇത് വ്യക്തഗണിതത്തിലെ ഖണ്ഡ

ഗുണനക്രിയപോലെയാകുന്നു. അടുത്ത ഉദാഹരണത്തിൽ ഇതു വ്യക്തമാകും.

ഉദാഹരണം 9

യാവത് താവത് പഞ്ചകം വ്യേകരൂപം
യാവത് താവത്ഭിഃ ത്രിഭിഃ സദ്വിരൂപം
സംഗുണ്യ ദ്രാക് ബ്രൂഹി ഗുണ്യം ഗുണം വാ
വ്യസ്തം സ്വർണ്ണേ കല്പയിത്വാ ച വിദ്വൻ

അർത്ഥം

യാവത് താവത് പഞ്ചകം = $5x$, വ്യേകരൂപം = ഒന്നു കുറച്ചത്, സദ്വിരൂപം = 2 കൂട്ടിയത്, ദ്രാക് = വേഗം, ബ്രൂഹി = പറയുക, ത്രിഭി = മൂന്നിരട്ടി.

സാരം

അവ്യക്തസംഖ്യയുടെ അഞ്ചിരട്ടിയിൽ നിന്നും ഒന്നു കുറച്ചതിനെ അവ്യക്തസംഖ്യയുടെ മൂന്നിരട്ടിയോട് രണ്ടു കൂട്ടിയതു കൊണ്ടു ഗുണിച്ചഫലം വേഗം പറയുക.

ഗുണ്യത്തിന്റെയോ ഗുണകത്തിന്റെയോ ചിഹ്നം വിപരീതമാക്കി (ധനചിഹ്നം ന്യൂനമാക്കി) സങ്കല്പിച്ച് ഗുണിച്ചഫലവും ഹേ വിദ്വാൻ, പറയുക.

ഗുണ്യം = $5x-1$
ഗുണകം = $3x+2$

ഗുണകത്തിൽ രണ്ടു ഖണ്ഡങ്ങളുണ്ട്. ഗുണ്യത്തെ രണ്ടിടത്തു വച്ച് ഗുണകത്തിലെ ഖണ്ഡങ്ങൾകൊണ്ടു വെവ്വേറെ ഗുണിക്കുക.

$(5x-1) \times 3x = 15x^2 - 3x$

$(5x-1) \times 2 = 10x - 2$

കൂട്ടിയത് $15x^2 + 7x - 2$

ഗുണകത്തിന്റെ ചിഹ്നം വിപരീതമാകുമ്പോൾ $-3x-2$ എന്നാകും ഇതിന്റെ ഖണ്ഡ ഗുണനപ്രകാരം ലഭിക്കുന്നത് ഇപ്രകാരമാണ്.

$(5x-1) \times -3x = -15x^2 + 3x$

$(5x-1) \times -2 = -10x + 2$

കൂട്ടിയത് $-15x^2 - 7x + 2$

കരണസൂത്രം 13

ഭാജ്യാൽച്ഛേദഃ ശുദ്ധ്യതിഃ പ്രച്യുതഃ സൽ
സ്വേഷുസ്വേഷു സ്ഥാനകേഷു ക്രമേണ
യൈഃ യൈഃ വർണ്ണൈഃ സംഗുണൌ യൈഃ ച രൂപൈഃ
ഭാഗാഹോര ലബ്ധയഃ താഃ സ്യുരത്ര

അർത്ഥം

പ്രച്യുത = ഒരോന്നായി കുറയ്ക്കുക, ഭാജ്യാൽ = ഭാജ്യത്തിൽ നിന്നും, സ്വേഷു സ്വേഷു = അതാതിന്റെ; സ്ഥാനകേഷു = സ്ഥാനങ്ങളിൽ നിന്ന്; ഭാഗാഹോര ലബ്ധി = ഹരണഫലം

സാരം

ഭാജ്യത്തിന്റെ ഓരോ ഘടകത്തിൽ നിന്നും ഭാജകത്തിലെ ഘടകങ്ങളെ ഏതേതെല്ലാം അവ്യക്തസംഖ്യയോ സംഖ്യകളോ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ഓരോ സ്ഥാനങ്ങളിൽ നിന്നും നിശ്ശേഷം കുറയ്ക്കാമോ ആ ഘടകങ്ങളാണ് ഹരണഫലം

$3x^2$ നെ x കൊണ്ടുഹരിക്കാൻ x നെ $3x$ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച സംഖ്യ ഭാജ്യത്തിൽനിന്നും കുറയ്ക്കണം. അതിനാൽ x കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഹരണഫലം $3x$ എന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം 10

രൂപൈർ ഷഡ്ഭിർ വർജിതാനാം ചതുർണ്ണാം
അവ്യക്താനാം ബ്രൂഹി വർഗ്ഗം സഖേ മേ

അർത്ഥം

ഷഡ്ഭിർ വർജിതം = 6 കുറച്ചത്, ചതുർണ്ണാം അവ്യക്തനാം= അവ്യക്തസംഖ്യയുടെ നാലിരട്ടിയിൽനിന്ന്.

സാരം

അവ്യക്തസംഖ്യയുടെ നാലിരട്ടിയിൽനിന്നു 6 കുറച്ചതിന്റെ വർഗ്ഗം ഹേ, സഖേ എന്നോടു പറയുക.

സംഖ്യ = $4x-6$

അതിന്റെ വർഗ്ഗം ഖണ്ഡ ഗുണന പ്രകാരം കാണാം.

$(4x-6)\times 4x = 16x^2-24x$

$(4x-6)(-6) = -24x + 36$

കൂട്ടിയത് = $16x^2 - 48x + 36$

വർഗ്ഗമൂലം

കരണസൂത്രം 14

കൃതിഭ്യ ആദായ പദാനി തേഷാം
ദ്വയോർ ദ്വയോർ ചാഭിഹതിം ദ്വിനിഘ്നീം
ശേഷാത് ത്യജേത് രൂപപദം ഗൃഹീത്വാ
ചേൽ സന്തി രൂപാണി തഥൈവ ശേഷം.

അർത്ഥം

കൃതിഭ്യ = വർഗ്ഗ ഘടകങ്ങളുടെ, പദാനി = വർഗ്ഗമൂലങ്ങൾ, ദ്വയോർ ദ്വയോർ ച അഭിഹതി = രണ്ടു എണ്ണം വീതം തമ്മിൽ ഗുണിച്ച്. ദ്വിനിഘ്നി = രണ്ടു കൊണ്ടു ഗുണിക്കുക, രൂപപദം = ദൃഢ സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലം

സാരം

വർഗ്ഗമൂലം കാണേണ്ട സംഖ്യയിലെ വർഗ്ഗഘടകങ്ങളുടെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക. രണ്ടു മൂലങ്ങൾ വീതം തമ്മിൽ ഗുണിച്ച് അവയെ രണ്ടു കൊണ്ടു വീണ്ടും ഗുണിക്കുക. ഈ ഘടകങ്ങളും വർഗ്ഗങ്ങളും സംഖ്യയിൽ നിന്നു കുറയ്ക്കുക.

അക്കസംഖ്യയുണ്ടെങ്കിൽ അതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കാണാം. ഇതും മറ്റുഘടകങ്ങളെപ്പോലെ ഗുണിച്ച് എല്ലാ ഘടകങ്ങളും ഒഴിവാക്കുന്നതുവരെ തുടരുക (ശിഷ്ടം ഇല്ലാതാക്കുന്നതുവരെ)

ഉദാഹരണം 11

യാവത് താവത് കാലക നീല വർണ്ണാഃ
ത്രിപഞ്ച സപ്തധനം
ദ്വിത്രൈകമിതൈഃ ക്ഷയഗൈഃ
സഹിതാ രഹിതാഃ കതി സ്യുഃ തൈഃ

അർത്ഥം

ത്രിപഞ്ച സപ്തധനം = ധനസംഖ്യകളായ 3,5,7 എന്നിവ; ദ്വി ത്രൈക മിതൈ = 2,3,1 എന്നീ അളവുകൾ; ക്ഷയഗൈ = ന്യൂനത്വം, സഹിതം = കൂട്ടിയത്, രഹിതാ = കുറച്ചത്.

സാരം

യാവത് താവത് (x), കാലകം (y), നീലകം (z) എന്നീ അവ്യക്ത സംഖ്യകളുടെ ഗുണകാരങ്ങൾ യഥാക്രമം ധനസംഖ്യ കളായ 3,5,7 എന്നിവയാണ് ഇത് ഒരു സംഖ്യ ($3x + 5y + 7z$)

അവയെ യഥാക്രമം ന്യൂനസംഖ്യകളായ 2,3,1 എന്നിവ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത് അടുത്ത സംഖ്യ $(-2x\ -3y-z)$

ആദ്യസംഖ്യയോട് രണ്ടാമത്തേതു കൂട്ടിയതും ആദ്യത്തേതിൽ നിന്നും രണ്ടാമത്തേതു കുറച്ചതും എത്രയാകുന്നു.?

ഒന്നാമത്തെ സംഖ്യ = $3x+5y+7z$

രണ്ടാമത്തേത് = $-2x\ -3y\ -z$

അവ കൂട്ടിയത് = $x+2y+6z$

വ്യത്യാസം = $5x+8y+8z$

ഉദാഹരണം 12

യാവത് താവത് ത്രയഗുണമൃണം കാലകൗ നിലകഃ സ്വം രൂപേണാഢ്യാ ദ്വിഗുണിത മിതൈഃ തൈസ്തു തൈരേവ നിഘ്നാഃ കിം സ്യാൽ തേഷാം ഗുണനജഫലം ഗുണ്യഭക്തം ച കിം സ്യാൽ ഗുണ്യസ്യാഥ പ്രകഥയ കൃതിം മൂലമസ്യാഃ കൃതേഃ ച

അർത്ഥം

ത്രയ ഗുണം ഋണം = 3, 3 എന്നീ ന്യൂന സംഖ്യകൾ; രൂപേണാഢ്യാ = ഒന്നുകൂട്ടി, ദ്വിഗുണിത മിതൈ = രണ്ടുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്, തൈസ്തു തൈ രേവ = അവ തമ്മിൽ തന്നെ, ഗുണ്യഭക്തം = ഗുണ്യം കൊണ്ടു ഹരിച്ചത്, മൂലമസ്യാഃ കൃതേ = അതിന്റെ വർഗ്ഗത്തിൽ നിന്നും വർഗ്ഗമൂലം.

സാരം

യാവത് താവത് (x), കാലകം (y), എന്നിവയെ ന്യൂന സംഖ്യയായ 3 കൊണ്ടും നീലകത്തെ ഒന്നുകൊണ്ടും ഗുണിച്ച്, 1, കൂട്ടിയത് ഗുണ്യം. അതിന്റെ രണ്ടിരട്ടിയാണ് ഗുണകം. അവയുടെ ഗുണനഫലവും ഗുണനഫലത്തെ ഗുണ്യം കൊണ്ടു ഹരിച്ചതും എത്ര?

ഗുണ്യത്തിന്റെ വർഗ്ഗവും അതിൽ നിന്നും വർഗ്ഗമൂലവും കാണുക

ഗുണ്യം = $-3x\ -3y\ +z\ +1$

ഗുണകം = ഗുണ്യം x 2 = $-6x\ -6y\ +2z\ +2$

ഗുണനഫലം ഖണ്ഡഗുണനാരീതിയിൽ കാണുക

$(-3x-3y+z+1)\times(-6x) = 18x^2+18\ xy\ -6xz\ -6x$

$(-3x-3y+z+1)\times(-6y) = 18xy\ +18y^2-6yz\ -6y$

$(-3x-3y+z+1)\times(2z) = -6xz-6yz\ +2z^2+2z$

$(-3x - 3y + z + 1) \times (2) = -6x - 6y + 2z + 2$

$18x^2 + 18y^2 + 2z^2 + 36xy - 12yz + 12xz - 12x - 12y + 4z + 2$

ഗുണ്യം കൊണ്ടു ഹരിക്കുക

ഗുണ്യം $-3x - 3y + z + 1$

$18x^2$നെ $-3x$ കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ $-6x$ എന്നു കിട്ടും.

$18y^2$നെ $-3y$ കൊണ്ടു ഹരിച്ചഫലം $= -6y$

$2z^2$നെ z കൊണ്ടു ഹരിച്ചഫലം $= 2z$

2നെ 1 കൊണ്ടു ഹരിച്ചഫലം = 2

ഇവ ഒരോന്നുകൊണ്ടും ഗുണ്യത്തെ ഗുണിച്ച് അവ ഹാര്യത്തിൽ നിന്നും കുറയ്ക്കുക. ശിഷ്ടം ഇല്ലാതാകുന്നതിനാൽ ഹരണഫലം $= -6x - 6y + 2z + 2$ എന്നു ലഭിക്കും.

ഗുണ്യ വർഗ്ഗം

$-3x - 3y + z + 1$

$-3x - 3y + z + 1$

$9x^2 + 9y^2 + z^2 + 1 + 18xy - 6yz - 6xz - 6x - 6y + 2z$

ഇതിൽ നിന്നും വർഗ്ഗമൂലം കാണുക വർഗ്ഗഘടകങ്ങളുടെ വർഗ്ഗമൂലം $= 3x,\ 3y,\ z, 1$ എന്നിവ. ഇവയുടെ വർഗ്ഗം $9x^2,\ 9y^2,\ z^2, 1$ എന്നിവയാണ്.

വർഗ്ഗ സംഖ്യയിൽ $6yz, 6xz, 6x, 6y$ എന്നിവ ന്യൂന ഘടകങ്ങളാണ് $18xy$ എന്നത് ധനസംഖ്യയുമാണ് അതിനാൽ $3x,\ 3y$, എന്നിവ ന്യൂന ഘടകങ്ങളും z ധനസംഖ്യയുമായിരിക്കും.

വർഗ്ഗമൂലഘടകങ്ങൾ ഇപ്രകാരം $-3x,\ -3y,\ z, 1$ എന്നിവ രണ്ടു വീതം ഗുണിച്ച് ഇരട്ടി കാണുക.

$-3x \times -3y \times 2 = 18xy$

$-3x \times z \times 2 = -6xz$

$-3y \times z \times 2 = -6yz$

$-3x \times 1 \times 2 = -6x$

$-3y \times 1 \times 2 = -6y$

$z \times 1 \times 2 = 2z$

വർഗ്ഗ ഘടകങ്ങൾ $9x^2, 9y^2, z^2, 1$ എന്നിവയും കൂട്ടിയത് $9x^2 + 9y^2 + z^2 + 1 + 18xy - 6yz - 6xz - 6x - 6y + 2z$ ഇവ ഹാര്യത്തിൽ നിന്നു കുറയ്ക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം വരുന്നതല്ല. അതിനാൽ വർഗ്ഗമൂലം $= -3x - 3y + z + 1$ എന്നു കിട്ടുന്നു.

അദ്ധ്യായം 4

കരണീ ഷഡ് വിധം

2, 3, 5 തുടങ്ങിയ അവർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗമൂലം കൃത്യമായി കണക്കാക്കാൻ സാധ്യമല്ല. അവയെ ഭിന്നസംഖ്യയായോ ദശാംശ സംഖ്യയായോ രൂപാന്തരപ്പെടുത്താനും പറ്റില്ല. ഇത്തരത്തിലുള്ള അവർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗമൂലത്തെ കരണി **(Surds)** എന്നു വിളിക്കുന്നു. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള കരണികൾ ബീജഗണിത ക്രിയകളിൽ സാധാരണ ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട് ഇവ ഉപയോഗിച്ചുള്ള ഗണിത ക്രിയകൾ ഇവിടെ വിവരിക്കുന്നു.

കരണസൂത്രം 15

യോഗം കരണ്യോർ മഹതീം പ്രകല്പ്യ
ഘാതസ്യ മൂലം ദ്വിഗുണം ലഘും ച
യോഗാന്തരേ രൂപവദേതയോഃ തേ
വർഗ്ഗേണ വർഗ്ഗം ഗുണയേത് ഭജേത് ച
ലഘ്വ്യാ ഹൃതായാഃ തു പദം മഹത്യാ
സൈകം നിരേകം സ്വഹതം ലഘ്വൂഘ്നം
യോഗാന്തരേ സ്തഃ ക്രമശഃ തയോർവാ
പൃഥക് സ്ഥിതിഃ സ്യാദ് യദി നാസ്തി മൂലം

അർത്ഥം

കരണ്യോർ യോഗം = കരണികളുടെ തുക, ഘാതസ്യമൂലം = ഗുണിതത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം, യോഗാന്തരം = തുകയും വ്യത്യാസവും, രൂപവദ് = സംഖ്യകളെപ്പോലെ, ഭജേത് = ഹരിക്കുക, ലഘ്വ്യാ = ലഘുവിനെ കൊണ്ട്, ഹൃതായാ = ഹരിച്ച്, സൈകം = ഒന്നുകൂട്ടിയത്, നിരേകം = ഒന്നു കുറച്ചത്, സ്വഹതം = അതിനെ തന്നെ ഗുണിച്ച്, ലഘ്വൂഘ്നം = ലഘു (ചെറിയ കരണി) കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്, ന അസ്തി = നിലനില്ക്കുന്നില്ല.

സാരം

കരണീസംഖ്യകളുടെ യോഗം മഹതി എന്നും അവയുടെ ഗുണിതത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലത്തിന്റെ ഇരട്ടി ലഘു എന്നും സങ്കല്പിക്കുക അവയുടെ തുകയും വ്യത്യാസവും കാണുക.

ഇതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലമാണ് കരണികളുടെ തുക. കരണികളെ ഒരു സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിക്കുകയോ ഹരിക്കുകയോ ചെയ്യണമെങ്കിൽ ആ സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം കൊണ്ട് കരണി സംഖ്യയെ (വർഗ്ഗമൂല ചിഹ്നത്തിനുള്ളിൽ) ഗുണിക്കുകയോ ഹരിക്കുകയോ വേണം.

(കരണികളിൽ) ചെറിയ സംഖ്യകൊണ്ട് വലിയ സംഖ്യയെ ഹരിച്ച് വർഗ്ഗമൂലം കാണുക. ഇതിനോട് ഒന്നു കൂട്ടുകയോ അതിൽ നിന്നും ഒന്നും കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്ത് ഫലങ്ങളുടെ വർഗ്ഗം കാണുക. അവയെ ചെറിയ സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിക്കുക. ഫലങ്ങളുടെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക. ഇവ കരണികളുടെ യോഗവും അന്തരവുമാകുന്നു. വർഗ്ഗമൂലം കാണാനായില്ലെങ്കിൽ അതുപോലെ തന്നെ നിലനിർത്തുക.

ഇവിടെ കരണികൾ കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്യുന്നതിന്റെ രണ്ടു രീതികൾ നിർദ്ദേശിച്ചിരിക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി

a,b എന്നീ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ കരണികളുടെ തുകയും വ്യത്യാസവും കാണുന്ന വിധം പരിശോധിക്കാം.

കരണിയോഗം = $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$

കരണിഅന്തരം = $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$

a) കരണിസംഖ്യകളുടെ തുക = $a + b = M$ ഇതിനെ മഹതി എന്നു നാമകരണം ചെയ്തിരിക്കുന്നു. കരണികളുടെ ഗുണിതത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലത്തിന്റെ ഇരട്ടി = $2\sqrt{ab}$ ഇതിന് ലഘു (L) എന്നും പറയുന്നു.

കരണിയോഗം = $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) = \sqrt{M+L} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$

കരണിഅന്തരം = $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = \sqrt{M-L} = \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$

അതായത് $\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)^2 = a+b\pm2\sqrt{ab}$ ആയതിനാൽ മേൽ പ്രസ്താവിച്ച സമവാക്യങ്ങൾ ശരിയാണെന്നു കാണാം.

b) ഒരു കരണിയെ $\left(\sqrt{a}\right)$ 2 കൊണ്ടു ഗുണിയ്ക്കാൻ കരണീസംഖ്യയെ ഗുണിതത്തിന്റെ വർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ മതി.

അതായത് $2\sqrt{a} = \sqrt{4a}$ എന്നാകും

c) കരണീ യോഗാന്തരത്തിനു മറ്റൊരു ക്രിയാ രീതി. കരണികളിൽ (a, b) എന്നിവയിൽ ചെറിയ കരണീ സംഖ്യ (b) കൊണ്ടു വലിയ സംഖ്യയെ ഹരിക്കുക ($\frac{a}{b}$ കാണുക) അതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലത്തോട് ഒന്നു കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്ത് വർഗ്ഗം കാണുക.

$\left[\sqrt{\frac{a}{b}} \pm 1\right]^2$ ഇതിനെ ചെറിയ കരണീ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിക്കുക.

അതായത് $\left[\frac{a}{b} \pm 2\sqrt{\frac{a}{b}} + 1\right]b = a + b \pm 2\sqrt{ab}$

ഇതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലമാണ് കരണികളുടെ യോഗവും അന്തരവും

ഉദാഹരണം 13

ദ്വികാഷ്ടമിത്യോ ത്രിഭ സംഖ്യയോഃ ച
യോഗാന്തരേ ബ്രൂഹി സഖേ കരണ്യോഃ
ത്രി സപ്ത മിത്യോഃ ച ചിരം വിചിന്ത്യ
ചേൽ ഷഡ്വിധം വേത്സി സഖേ കരണ്യോഃ

അർത്ഥം

ദ്വികാഷ്ട മിതി = ദ്വികം = 2, അഷ്ടം = 8, മിതി = മൂല്യം ത്രിഭ സംഖ്യ = ത്രി = 3, ഭം = നക്ഷത്രം = 27, ത്രി സപ്തമിതി = 3,7 എന്നിവ.

സാരം

2,8 എന്നും 3, 27 എന്നും 3,7 എന്നും മൂല്യങ്ങളുള്ള കരണികളുടെ തുകയും വ്യത്യാസവും, ഹേ സഖേ, കരണീഷഡ് വിധം അറിയുമെങ്കിൽ, ആലോചിച്ചു പറയുക.

കരണികളുടെ തുകയും വ്യത്യാസവും

(a) $\sqrt{2} \pm \sqrt{8} = \sqrt{2+8 \pm 2\sqrt{2 \times 8}} = \sqrt{10 \pm 8} = \sqrt{18}, \sqrt{2}$

(b) $\sqrt{3} \pm \sqrt{27} = \sqrt{3+27 \pm 2\sqrt{27 \times 3}} = \sqrt{30 \pm 18} = \sqrt{48}, \sqrt{12}$

(c) $\sqrt{7} \pm \sqrt{3} = \sqrt{7+3 \pm 2\sqrt{7 \times 3}} = \sqrt{10 \pm 2\sqrt{21}} =$

$\sqrt{10+2\sqrt{21}}, \sqrt{10-2\sqrt{21}}$

ഉദാഹരണം 14

ദ്വിത്ര്യഷ്ട സംഖ്യാ ഗുണകഃ കരണ്യോർ
ഗുണ്യഃ ത്രിസംഖ്യാ ച സ പഞ്ചരൂപാ
വധം പ്രചക്ഷ്വാഽശു വിപഞ്ചരൂപേ
ഗുണേഽഥവാ ത്ര്യർക്കമിതേ കരണ്യൗ

അർത്ഥം

ദ്വിത്ര്യഷ്ട സംഖ്യ = 2,3,8 എന്നീ സംഖ്യകൾ, സപഞ്ചരൂപാ= 5 കൂട്ടിയത്, വിപഞ്ചരൂപം = 5 കുറച്ചത്, ത്ര്യർക്കമിതി = 3, 12 എന്നീ സംഖ്യകൾ

സാരം

a) 2,3,8 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ കരണികൾ കൂട്ടിയത് ഗുണക മാണ് ഗുണ്യം മൂന്നിന്റെ കരണിയോട് 5 കൂട്ടിയതാണ്. അവയുടെ ഗുണനഫലം വേഗം പറയുക.

b) ഗുണകം 3, 13 എന്നിവയുടെ കരണികളുടെ തുകയിൽ നിന്നും 5 കുറച്ചതായാൽ ഗുണ്യഗുണകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം പറയുക

a) ഒന്നാം വിഭാഗത്തിൽ ഗുണകം = $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{8}$

ഗുണ്യം = $\sqrt{3}+5$

$$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{10+2\sqrt{2\times 8}}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$\left(\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+5\right)=3+3\sqrt{6}+5\sqrt{3}+15\sqrt{2}$$

b) ഗുണ്യം = $\sqrt{3}+5$

ഗുണകം = $\sqrt{3}+\sqrt{12}-5$

$$\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{3}+2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$$

ഗുണകം = $3\sqrt{3}-5$

ഗുണനഫലം = $\left(\sqrt{3}+5\right)\left(3\sqrt{3}-5\right)=9+15\sqrt{3}-5\sqrt{3}-25$

$=-16+10\sqrt{3}$

കരണസൂത്രം 16

ക്ഷയോ ഭവേൽ ച ക്ഷയരൂപ വർഗ്ഗഃ
ചേൽ സാധ്യതോഽസൗ കരണീത്വ ഹേതോഃ
ഋണാത്മികായാഃ ച തഥാ കരണ്യോ
മൂലം ക്ഷയോരൂപ വിധാന ഹേതോഃ

അർത്ഥം

ക്ഷയോ ഭവേത് = ന്യൂനസംഖ്യയാകുന്നു. ഋണാത്മികം = ന്യൂന സ്വഭാവമുള്ളത്, കരണിത്വ ഹേതു = കരണിയാകുന്നതിനാൽ

സാരം

ന്യൂനസംഖ്യയെ കരണിയാക്കുമ്പോൾ സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗത്തെ കരണിയാക്കി ന്യൂന ചിഹ്നം ഇടണം. ന്യൂന കരണിയുടെ വർഗ്ഗമൂലം കാണാൻ സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലം ന്യൂനമായി കണക്കാക്കണം.

ഉദാഹരണായി -3 നെ കരണിയാക്കുമ്പോൾ $-\sqrt{9}$ എന്നും $-\sqrt{9}$ എന്ന ന്യൂന കരണിയെ ലഘൂകരിക്കുമ്പോൾ -3 എന്നും കണക്കാക്കണം

കരണസൂത്രം 17

ധനർണ്ണതാ വ്യത്യയമിപ്സിതാ യാഃ
ഛേദദേ കരണ്യാ അസകൃത് വിധായ
താദൃക്ഛിദാ ഭാജ്യ ഹരൗ നിഹന്യാദ്
ഏകൈവ യാവത് കരണീ ഹരേ സ്യാൽ
ഭാജ്യാഃ തയാ ഭാജ്യഗതാഃ കരണ്യോ
ലബ്ധാഃ കരണ്യോ യദി യോഗജാഃ സ്യുഃ
വിശ്ലേഷസൂത്രേണ പൃഥക് ച കാര്യാ
യഥാതഥാ പ്രഷ്ടുരഭീപ്സിതാഃ സ്യുഃ

അർത്ഥം

ധനർണ്ണതാ = ധനന്യൂനത്വം, വ്യത്യയം = വിപരീതം, താദൃക് = അതുപോലെയുള്ള, ഭാജ്യഹരൗ = അംശഛേദങ്ങൾ, നിഹന്യാദ് = ഗുണിക്കുക, അഭീപ്സിതം = ഇഷ്ടപ്പെട്ടത്.

സാരം

ഛേദകരണികളുടെ ധനന്യൂനചിഹ്നങ്ങൾ വിപരീതമാക്കിയ ഛേദം കൊണ്ട് സംഖ്യയുടെ അംശഛേദങ്ങളെ ഗുണിക്കുക. അംശത്തിൽ ഒരു കരണിമാത്രം അവശേഷിക്കുന്നതുവരെ ഇതു തുടരുക. ആ അംശത്തെ കരണി ഇല്ലാത്ത ഛേദം കൊണ്ട് ഹരിച്ച് വിശ്ലേഷ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് ഇഷ്ടം പോലെ ഘടകങ്ങളാക്കുക.

അംശഛേദങ്ങളിൽ (ഭാജ്യഭാജകങ്ങളിൽ) കരണികളുണ്ടെങ്കിൽ ഭാജകത്തെ കരണിമുക്തമാക്കണം. ഇതിന് അതിന്റെ ധനചിഹ്നത്തെ ന്യൂന ചിഹ്നമായും ന്യൂനത്തെ ധനചിഹ്നമായും മാറ്റി ഘടകം ഉണ്ടാക്കുക. ഇതുകൊണ്ട് അംശഛേദങ്ങളെ ഗുണിക്കുക.

ഉദാഹരണമായി

$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{c}-\sqrt{d}}$ എന്നതിൽ ഛേദത്തിന്റെ ചിഹ്നം മാറ്റുമ്പോൾ

$\sqrt{c}+\sqrt{d}$ എന്നാകും ഇതുകൊണ്ട് അംശത്തേയും ഛേദത്തേയും ഗുണിക്കുമ്പോൾ ഛേദത്തിന്റെ കരണി ഒഴിവാക്കാം.

ഇതിൻപ്രകാരം ലഭിക്കുന്നത് $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{d})}{c-d}$ എന്നാണ്.

അംശത്തെ ഒരു കരണിമാത്രം അവശേഷിക്കുന്നതു വരെ ലഘൂകരിക്കുക. ഛേദം കൊണ്ട് ഓരോന്നിനെയും ഹരിച്ച് ഭിന്ന സംഖ്യയെ ഘടകങ്ങളാക്കി മാറ്റാം.

ഒരു കരണിയെ ഒന്നിലധികം ഘടകങ്ങളാക്കി മാറ്റാൻ വിശ്ലേഷസൂത്രം ഉപയോഗിക്കണം ഇത് ഇവിടെ ചേർക്കുന്നു.

കരണസൂത്രം 18

വർഗ്ഗേണയോഗ കരണീ വിഹൃതാ വിശുധ്യേത്
ഖണ്ഡാനി തൽ കൃതിപദസ്യ യഥേപ്സിതാനി
കൃത്വാ തദീയ കൃതയഃ ഖലു പൂർവ്വ ലബ്ധ്യാ
ക്ഷുണ്ണാ ഭവന്തി പൃഥക് ഏവമിമാഃ കരണ്യാ

അർത്ഥം

വിഹൃതാ = ഹരിച്ച്; കൃതിപദം = വർഗ്ഗങ്ങളുടെ വർഗ്ഗമൂലം

സാരം

കരണിയെ ഘടകങ്ങളാക്കിമാറ്റാൻ (കരണി വിശ്ലേഷണം) അതിനെ ഒരു വർഗ്ഗ സംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിക്കുക. ഈ വർഗ്ഗസംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലത്തെ ഇഷ്ടമുള്ള ഘടകങ്ങളാക്കുക. ഈ ഘടകങ്ങളുടെ വർഗ്ഗംകൊണ്ട് ഗുണിച്ച് കരണിയെ ഖണ്ഡങ്ങളാക്കാം.

ഉദാഹരണത്തിന് $\sqrt{5}$ നെ ഒന്നിലധികം കരണികളാക്കാൻ ഒരു വർഗ്ഗ സംഖ്യയായ 25 കൊണ്ടു ഹരിക്കുക. ഫലം $\sqrt{\frac{5}{25}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ 25 ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം 5 ആകുന്നു. അതിനെ 3+2 എന്ന ഖണ്ഡങ്ങളാക്കുക. ഈ ഖണ്ഡങ്ങളുടെ വർഗ്ഗം കൊണ്ട് $\frac{1}{\sqrt{5}}$ നെ ഗുണിക്കുക.

അതായത് $\sqrt{5}=\sqrt{\frac{9}{5}}+\sqrt{\frac{4}{5}}$ എന്ന ഘടകങ്ങൾ ലഭിക്കും.

ഇതാണ് വിശ്ലേഷ സൂത്രം

ഉദാഹരണം 15

ദ്വിക ത്രിപഞ്ച പ്രമിതാഃ കരണ്യാഃ
താസാം കൃതിം ദ്വിത്രിക സംഖ്യയോഃ ച
ഷഡ്പഞ്ചക ദ്വിത്രിക സമ്മിതാനാം
പൃഥക് പൃഥക് മേ കഥയാfശു വിദ്വാൻ
അഷ്ടാദശാഷ്ട ദ്വിക സമ്മിതാനാം
കൃതിം കൃതീനാം ച സഖേ പദാനി

അർത്ഥം

ദ്വികത്രിപഞ്ചകം = 2,3,5; ദ്വിത്രിക = 2,3, ഷഡ്പഞ്ചക ദ്വിത്രികം = 6,5,2,3, അഷ്ടാദശാഷ്ടദ്വികം = 18,8,2

സാരം

ഹേ, സഖേ, 2, 3, 5 എന്നിവയുടെ കരണികളുടെ തുകയുടെയും 2, 3 എന്നിവയുടെ കരണികളുടെ തുകയുടെയും 6, 5, 2, 3 എന്നിവയുടെ കരണിയോഗത്തിന്റെയും വർഗ്ഗം വെവ്വേറെ വേഗം പറയുക.

18, 8, 2 എന്നിവയുടെ കരണിയോഗത്തിന്റെ വർഗ്ഗവും വർഗ്ഗത്തിൽനിന്നു അതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലവും പറയുക.

a) കരണി സംഖ്യ $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$

വർഗ്ഗം $2+3+5+2\times(\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15})=10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}$

b) കരണി $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ വർഗ്ഗം $2+3+2\sqrt{6}=5+\sqrt{24}$

c) കരണി $\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$

വർഗ്ഗം $6+5+2+3+2\sqrt{30}+2\sqrt{12}+2\sqrt{18}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}+2\sqrt{6}$

$=16+\sqrt{120}+\sqrt{48}+\sqrt{72}+\sqrt{40}+\sqrt{60}+\sqrt{24}$

d) കരണി $\sqrt{18}+\sqrt{8}+\sqrt{2}$

$\sqrt{8}+\sqrt{2}=\sqrt{8+2+2\sqrt{2\times 8}}=\sqrt{18}$

കരണി $\sqrt{18}+\sqrt{18}=2\sqrt{18}=\sqrt{72}$

വർഗ്ഗം 72

72 ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം $\sqrt{72}$ ഇതിനെ വിശ്ലേഷണം ചെയ്യാൻ വർഗ്ഗസംഖ്യയായ 36 കൊണ്ടു ഹരിക്കുക. 36 ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം = 6 ഇതിനെ 3+2+1 എന്നീ ഖണ്ഡങ്ങളാക്കാം. ഖണ്ഡങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങൾ 9,4,1 എന്നിവയാണ്.

$\sqrt{\frac{72}{36}}$ കൊണ്ട് ഇവയെ ഗുണിക്കുക.

$\sqrt{\frac{72}{36}\times 9}+\sqrt{\frac{72}{36}\times 4}+\sqrt{\frac{72}{36}\times 1}=\sqrt{18}+\sqrt{8}+\sqrt{2}$ എന്നു ഘടകങ്ങളുണ്ടാകുന്നു.

കരണസൂത്രം 19 (കരണീയോഗത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കാണാൻ)

വർഗ്ഗേകരണ്യാഃ യദി വാ കരണ്യോഃ
തുല്യാനി രൂപാണ്യഥവാ ബഹൂനാം
വിശോധയേത് രൂപകൃതേഃ പദേന
ശേഷസ്യ രൂപാണി യുതോനി താനി
പൃഥക് തദർധേ കരണിദ്വയം സ്യാൽ
മൂലേƒഥ ബഹ്വീ കരണീ തയോർ യാ
രൂപാണി താന്യേവമതോƒപി ഭൂയഃ
ശേഷഃ കരണ്യോ യദി സന്തി വർഗ്ഗേ

അർത്ഥം

രൂപകൃതി = സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം, പദേന = വർഗ്ഗമൂലം കൊണ്ടു; യുതോനിതം = കൂട്ടിയതും കുറച്ചതും; തദർധം = അതിന്റെ പകുതി

സാരം

ഒരു വർഗ്ഗസംഖ്യയിൽ ഒന്നോ അധികമോ കരണികൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ കരണിയല്ലാത്തസംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗത്തിൽ നിന്ന് ഒന്നോ അധികമോ കരണികളുടെ സംഖ്യ കുറച്ച് ശിഷ്ടത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക. അകരണി സംഖ്യയിൽ നിന്നും ഈ മൂലം കുറയ്ക്കുകയും അതിനോടു കൂട്ടുകയും ചെയ്ത് ഫലങ്ങളുടെ പകുതി കാണുക. ഇപ്രകാരം 2 കരണികൾ ലഭിക്കുന്നു. വർഗ്ഗ

സംഖ്യയിൽ മറ്റു കരണികളുണ്ടെങ്കിൽ ഈ കരണികളിൽ ഒന്നിനെ നിലനിർത്തി വീണ്ടും ലഘൂകരണം ആവർത്തിക്കുക.

ഉദാഹരണമായി $5+\sqrt{24}$ എന്ന സംഖ്യ സങ്കല്പിക്കുക. ഇതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കാണാൻ 5 ന്റെ വർഗ്ഗത്തിൽ നിന്ന് കരണിയുടെ മൂല്യം (24) കുറയ്ക്കുക. ശിഷ്ടം = 1 ആണ്. അതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം = 1

ഇനി അകരണി സംഖ്യയായ 5 നോടു 1 കൂട്ടി പകുതി കാണുക.

ഇത് ഒരു കരണി $\frac{5+1}{2}=3$

രണ്ടാമത്തെ കരണി $\frac{5-1}{2}=2$

അതായത് $5+\sqrt{24}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

അതിനാൽ $5+\sqrt{24}$ ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ എന്ന് ഉത്തരമാണ്.

കരണസൂത്രം 20

ഋണാത്മികാ ചേൽ കരണീകൃതൗ സ്യാൽ
ധനാത്മികാ താം പരികൽപ്യ സാധ്യേ
മൂലേ കരണ്യാവനയോരഭീഷ്ടാ
ക്ഷയാത്മികൈകാ സുധിയാവഗമ്യാ

അർത്ഥം

ഋണാത്മികം = ന്യൂനമൂല്യമുള്ളത്, കരണീകൃതൗ = കരണീ വർഗ്ഗത്തിൽ, കരണ്യാവനയോ = രണ്ടു കരണികളിൽ; ക്ഷയാത്മി കൈകം = ഒന്നു ന്യൂനസംഖ്യയായി.

സാരം

വർഗ്ഗസംഖ്യയിലെ കരണി ന്യൂനസംഖ്യയാണെങ്കിൽ അത് ധന സംഖ്യയായി കണക്കാക്കി വർഗ്ഗമൂലം കാണുക. കരണികളുടെ മൂലങ്ങൾ പരിശോധിച്ച് യോജ്യമായ ഒന്നിന് ന്യൂനചിഹ്നം നൽകുക.

ഉദാഹരണമായി $5-\sqrt{24}$ എന്നതിലെ ന്യൂന കരണിയെ ധനസംഖ്യയായി കണക്കാക്കുമ്പോൾ $5+\sqrt{24}$ എന്നാകും ഇതിന്റെ

വർഗ്ഗമൂലം $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ എന്നാണ്. സ്ഥിരസംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം 25 എന്നത് കരണിയേക്കാൾ കൂടുതലാണ്. അതിനാൽ ഇവയിൽ ചെറിയ കരണി ന്യൂനസംഖ്യയായിരിക്കണം.

$5-\sqrt{24}$ ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ എന്നായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 16

ത്രിസപ്ത മിത്യോർ വദ മേ കരണ്യോർ
വിശ്ലേഷ വർഗ്ഗം കൃതിതഃ പദം ച
ദ്വികത്രിപഞ്ചപ്രമിതാഃ കരണ്യാഃ
സ്വസ്വർണ്ണഗാ വ്യസ്ത ധനർണ്ണഗാ വാ
താസാം കൃതിം ബ്രൂഹി കൃതേഃ പദം ച്
ചേൽ ഷഡ്വിധം വേത്സി സഖേ കരണ്യാഃ

അർത്ഥം

ത്രിസപ്തമിതി = 3,7 എന്നിവ, ദ്വികത്രിപഞ്ചപ്രമിതാ = 2,3,5 എന്നിവ, വിശ്ലേഷ വർഗ്ഗം = വ്യത്യാസത്തിന്റെ വർഗ്ഗം, കൃതിതഃ = വർഗ്ഗത്തിൽ നിന്ന്, സ്വസ്വർണ്ണഗാ = ധനം, ധനം, ന്യൂനം എന്നിങ്ങനെ, വ്യസ്ത ധനർണ്ണഗാ = ധനന്യൂന ചിഹ്നങ്ങൾ വിപരീതമാക്കിയത്.

സാരം

ഹേ സഖേ താങ്കൾക്ക് ആറുവിധകരണീ ഗണിതക്രിയകൾ അറിയുമെങ്കിൽ 3,7 എന്നിവയുടെ കരണീ വ്യത്യാസത്തിന്റെ വർഗ്ഗം, വർഗ്ഗത്തിൽനിന്നു വർഗ്ഗമൂലം, 2,3,5 എന്നിവയുടെ കരണികൾ യഥാക്രമം ധനം, ധനം, ന്യൂനം എന്ന ചിഹ്നങ്ങളായ സംഖ്യയുടെയും അവയുടെ ധന ന്യൂന ചിഹ്നങ്ങൾ വിപരീത മായുള്ള സംഖ്യയുടെയും വർഗ്ഗവും വർഗ്ഗത്തിൽ നിന്ന് അവയുടെ വർഗ്ഗമൂലവും പറഞ്ഞാലും.

a) കരണിസംഖ്യ $\sqrt{3},\sqrt{7}$ അവയുടെ വ്യത്യാസം $\sqrt{7}-\sqrt{3}$

ഇതിന്റെ വർഗ്ഗം $=10-2\sqrt{21}$

വർഗ്ഗമൂലം കാണാൻ $=10-2\sqrt{21}=10-\sqrt{84}$

$10^2-84=16, \sqrt{16}=4$

കരണികൾ $\frac{10+4}{2}=7$, $\frac{10-4}{2}=3$

വർഗ്ഗമൂലം $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ ഒരു കരണി ന്യൂനചിഹ്നമുള്ളതാണ്

b) കരണി $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$

വർഗ്ഗം $2+3+5+2\sqrt{6}-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}$

$=10+\sqrt{24}-\sqrt{40}-\sqrt{60}$

ഇതിലെ ന്യൂനചിഹ്നം ധനചിഹ്നമാകുമ്പോൾ

$10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}$ എന്നാകുന്നു.

ഇവിടെ രണ്ടു കരണികൾ വീതം കൂട്ടിയ സംഖ്യകൾ 24+40=64, 24+60=84, 40+60=100. ഇത് അകരണീസംഖ്യ (10)യുടെ വർഗ്ഗത്തിൽ നിന്നും കുറച്ചത്. 100-64=36. 36ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം = 6

രണ്ടു കരണികൾ $\frac{10+6}{2}=8$, $\frac{10-6}{2}=2$ ഇതിലെ ചെറിയ സംഖ്യയുടെ നാലിരട്ടികൊണ്ട് കുറയ്ക്കാനുപയോഗിച്ച കരണി കളെ ഹരിക്കുക $\frac{24}{8}=3$, $\frac{40}{8}=5$

ഇവയിൽ 3 കരണികൾ $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ എന്നിവയാണ്. വർഗ്ഗ മൂലകരണികൾ ആദ്യം ലഭിച്ച $\sqrt{8}$ എന്ന മൂല്യം സംഖ്യയിൽ ഒരു കരണി മാത്രമുള്ളപ്പോൾ മാത്രമേ സാധുവാകൂ. ഇതിനുള്ള നിയമം അടുത്ത കരണസൂത്രത്തിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

വർഗ്ഗകരണികളിൽ 2 എണ്ണം ന്യൂനസംഖ്യയാകയാൽ വർഗ്ഗത്തിലെ ഒരു കരണി ന്യൂന സംഖ്യയായിരിക്കണം. ഏറ്റവും വലിയ കരണി $\sqrt{60}$ എന്നതിന് ന്യൂനചിഹ്നമുള്ളതിനാൽ വർഗ്ഗ മൂലത്തിലെ വലിയ കരണി $\sqrt{5}$ ന്യൂനസംഖ്യയായിരിക്കണം.

വർഗ്ഗമൂലം $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$

ധനന്യൂനചിഹ്നങ്ങൾ വിപരീതമാകുമ്പോൾ കരണി $-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}$ എന്നാകും

ഇതിന്റെ വർഗ്ഗം $10+\sqrt{24}-\sqrt{40}-\sqrt{60}$ എന്നു കിട്ടും

വർഗ്ഗമൂലം കാണുവാൻ ന്യൂനചിഹ്നം ധനചിഹ്നമാക്കി

മാറ്റുക $= 10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}$

ഇതിന്റെ വർഗ്ഗമൂല ഘടകങ്ങൾ $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ എന്നിവയാണ്. ഇതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം മുമ്പു പറഞ്ഞപ്രകാരം $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}$ എന്നോ $-\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}$ എന്നോ ആകാം.

കരണസൂത്രം 21

ഏകാദിസങ്കലിത മിത കരണീ ഖണ്ഡാനി വർഗ്ഗരാശൌ സ്യു:
വർഗ്ഗേ കരണീത്രിതയേ കരണീദ്വിതയസ്യ തുല്യ രൂപാണി
കരണി ഷഡ്കേ ത്രിസ്രൂണാം ദശാസു
ചതുസ്രൂണാം തിഥിഷുപഞ്ചാനാം
രൂപകൃതേ: പ്രോജ്ഞ്യപദം ഗ്രാഹ്യം ചേൽ അന്യഥാ ന
സത്ക്വാപി ഉൽപത്സ്യ മാനയൈവം
മൂലകരണ്യാƒല്പയാ ചതുർഗുണയാ
യാസാമപവർത്ത: സ്യാൽ രൂപകൃതേസ്താ: വിശോധ്യ: സ്യു:
അപവർത്തേ യാ ലബ്ധാ മൂലകരണ്യോ ഭവന്തി താശ്ചാപി
ശേഷവിധിനാ ന യദിതാ ഭവന്തി മൂലം തദാ തദസത്

അർത്ഥം

ഏകാദിസങ്കലിതം = ഒന്നോ അധികമോ ഉള്ള, ത്രിസ്രൂണാം = 3 എണ്ണത്തിൽ, തിഥി = 15, പ്രോജ്ഞ്യ = കുറച്ച് ന സത്ക്വാപി = ഒരിക്കലും ശരിയല്ല, കരണ്യല്പയാ = ചെറിയ കരണി കൊണ്ട്, ചതുർഗുണയാ = നാലിരട്ടികൊണ്ട്, യാസാം അപവർത്ത = ലഘൂകരിച്ചവ, രൂപകൃതേസ്താ: = സംഖ്യാവർഗ്ഗത്തിൽനിന്ന്, തദസത് = അത് സാധ്യമല്ല (അസത്യമാണ്)

സാരം

വർഗ്ഗരാശിയിൽ ഒന്നിലധികം കരണികളുണ്ടാകാം. മൂന്നു കരണികളുള്ള വർഗ്ഗസംഖ്യയിൽ രണ്ടു കരണികളുടെ തുകയ്ക്കു തുല്യമായ സംഖ്യയും, 6 കരണികളുണ്ടെങ്കിൽ 3 കരണികളുടെ തുകയും, 10 കരണികളുണ്ടെങ്കിൽ 4 കരണികളുടെ തുകയും, 15 കരണികളുണ്ടെങ്കിൽ 5 കരണികളുടെ തുകയും, സ്ഥിരസംഖ്യ (അകരണി) യുടെ വർഗ്ഗത്തിൽ നിന്നും കുറച്ച ശിഷ്ടത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക. അതു കഴിയില്ലെങ്കിൽ സംഖ്യ ഒരിക്കലും വർഗ്ഗസംഖ്യയല്ല.

ഇപ്രകാരം ലഭിക്കുന്ന വർഗ്ഗമൂലത്തിൽ നിന്നു ലഭിക്കുന്ന (സ്ഥിരസംഖ്യയിൽ നിന്നു കുറച്ചും കൂട്ടിയും പകുതി) കരണി

കളിൽ ചെറിയ കരണിയുടെ നാലിരട്ടികൊണ്ട് സംഖ്യാവർഗ്ഗത്തിൽനിന്നു കുറച്ച കരണി സംഖ്യകളെ ഹരിക്കുക. ഹരണഫലങ്ങൾ മൂലത്തിലെ മറ്റു കരണികളാകും. ഈ ക്രിയയിലൂടെ മൂലം കാണാൻ സാധിക്കുന്നില്ലെങ്കിൽ തന്നിരിക്കുന്ന സംഖ്യ പൂർണ്ണ വർഗ്ഗമല്ല. (അത് ശരിയല്ല)

ഉദാഹരണം 17

വർഗ്ഗേയത്ര കരണ്യോ ദന്തൈഃ സിദ്ധൈർ ഗജൈർ മിതാ വിദ്വൻ
രൂപൈർ ദശഭിരുപേതാഃ കിം മൂലം ബ്രൂഹി തസ്യ സ്യാൽ

അർത്ഥം

ദന്തം = 32, സിദ്ധ = 24, ഗജം = 8, ദശഭി = 10

സാരം

ഒരു വർഗ്ഗസംഖ്യയിൽ 32,24,8 എന്നിവയുടെ കരണികളുണ്ട്. അതിൽ പൂർണ്ണസംഖ്യ 10 ആകുന്നു. അതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം എത്രയാകുന്നു.

സംഖ്യ $10+\sqrt{32}+\sqrt{24}+\sqrt{8}$

ഇവിടെ 3 കരണികളുണ്ട്. അതിനാൽ വർഗ്ഗമൂലത്തിൽ 3 കരണികളുണ്ടാകും. രണ്ടു കരണികൾ വീതം കൂട്ടിയ സംഖ്യകൾ, 56,40,32 എന്നിവയാണ്. സംഖ്യ (10) യുടെ വർഗ്ഗത്തിൽ നിന്നു കുറച്ച ഫലങ്ങൾ 44,60,48 എന്നിവയാണ്. ഇവയുടെ വർഗ്ഗമൂലം കാണാൻ സാധ്യമല്ല. അതിനാൽ തന്നിരിക്കുന്ന സംഖ്യ ഒരു കരണിവർഗ്ഗമല്ല.

ഉദാഹരണം 18

വർഗ്ഗേ യത്ര കരണ്യാ തിഥിവിശ്വ ഹുതാശനൈഃ ചതുർഗുണിതൈഃ
തുല്യാ ദശരൂപാഢ്യാഃ കിം മൂലം ബ്രൂഹി തസ്യ സ്യാൽ

അർത്ഥം

തിഥി = 15, വിശ്വം = 13, ഹുതാശനൻ = അഗ്നി = 3, ചതുർഗുണിതം = 4 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്. ദശരൂപാഢ്യാ = 10 കൂട്ടിയത്

സാരം

ഒരു വർഗ്ഗസംഖ്യയിൽ 15,13,3 എന്നിവയെ 4 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച കരണികളുണ്ട്. കരണി അല്ലാത്ത സംഖ്യ 10 കൂട്ടി ഇതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം എത്രയെന്നു പറയുക.

സംഖ്യ $10+\sqrt{60}+\sqrt{52}+\sqrt{12}$

രണ്ടു വീതം കരണികൾ കൂട്ടിയത് 112,72,64 എന്നിവയാണ്.

സംഖ്യാവർഗ്ഗം $=100$

ഇതിൽ നിന്നും 64 കുറച്ച ശിഷ്ടം = 36

36 ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം = 6

കരണികൾ $\frac{10+6}{2}=8,\quad \frac{10-6}{2}=2$ എന്നിവയാണ്

ഇവയിൽ ചെറിയ കരണിയുടെ നാലിരട്ടി (8) കൊണ്ട് സംഖ്യാവർഗ്ഗത്തിൽ നിന്നും കുറച്ച സംഖ്യകളായ 52,12 എന്നിവയെ ഹരിച്ചത് $\frac{13}{2},\frac{3}{2}$ എന്നിവയാണ്.

എന്നാൽ $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{13}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}$ എന്നതിന്റെ വർഗ്ഗം

$10+\sqrt{52}+\sqrt{12}+\sqrt{39}$ ആകുന്നു.

തന്നിരിക്കുന്ന സംഖ്യയിലെ രണ്ടു കരണികൾ യോജിക്കുമെങ്കിലും $\sqrt{60}$ നു പകരം $\sqrt{39}$ ആണ് ശരിയായ ഘടകം അതിനാൽ നിർദ്ദിഷ്ട സംഖ്യ പൂർണ്ണ വർഗ്ഗ സംഖ്യയല്ല.

ഉദാഹരണം 19

അഷ്ടൗ ഷട് പഞ്ചാശത് ഷഷ്ടി: കരണീത്രയം കൃതൗ യത്ര
രൂപൈർ ദശഭിരൂപേതാ കിം മൂലം ബ്രൂഹി തസ്യ സ്യാൽ

അർത്ഥം

അഷ്ടം, ഷട്പഞ്ചാശത്, ഷഷ്ടി: = 8,56,60

സാരം

8, 56, 60 എന്നീ മൂന്നു കരണികളും ദൃഢസംഖ്യ 10-ം ഉള്ള ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലം എത്രയെന്നു പറയുക.

തന്നിരിക്കുന്ന സംഖ്യ $10+\sqrt{8}+\sqrt{56}+\sqrt{60}$

രണ്ടു കരണികൾ വീതം കൂട്ടിയവ 8+56=64, 8+60=68, 56+60=116 പൂർണ്ണസംഖ്യാവർഗ്ഗം = 100

ഇതിൽ നിന്നും രണ്ടു കരണികളുടെ തുകകൾ കുറയ്ക്കുക.

100 - 64 = 36, 100 - 68 = 32, 100 - 116= -16

ഇവയിൽ 36 മാത്രമേ വർഗ്ഗസംഖ്യയാകൂ.

36 ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം =6

കരണിദ്വയങ്ങൾ $\frac{10+6}{2}=8, \frac{10-6}{2}=2$ എന്നിവയാണ്.

ഇതിൽ ചെറിയ കരണിയുടെ 4 ഇരട്ടി = 8

ഇതുകൊണ്ട് കുറക്കാനുപയോഗിച്ച രണ്ടു കരണികളെ ഹരിക്കുക. $\frac{8}{8}=1, \quad \frac{56}{8}=7$

ലബ്ധമായ വർഗ്ഗമൂലം $=\sqrt{2}+1+\sqrt{7}$

ഇതിന്റെ വർഗ്ഗം $=10+\sqrt{8}+\sqrt{56}+\sqrt{28}$ എന്നാണ്.

തന്നിരിക്കുന്ന സംഖ്യ ഇതിൽനിന്നു വിഭിന്നമാണ്. അതിനാൽ അതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കരണികളുടെ തുകയായി കാണാൻ സാധ്യമല്ല.

ഉദാഹരണം 20

ചതുർഗുണാഃ സൂര്യ തിഥീഷുരുദ്ര
നാഗർത്തവോ യത്ര കൃതൌ കരണ്യാഃ
സവിശ്വരൂപാ വദ തൽപദം തേ
യദ്യസ്തി ബീജേ പടുതാഭിമാനഃ

അർത്ഥം

ചതുർഗുണാ = 4 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്, സൂര്യൻ = 12, തിഥി = 15, ഇഷു = ബാണം = 5, രുദ്രൻ = 11, നാഗം = 8, ഋതു = 6, വിശ്വം = 13

സാരം

4 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച 12,15,5,11,8,6 എന്നിവ ഒരു വർഗ്ഗസംഖ്യയിലെ കരണികളും 13 അതിലെ സംഖ്യയുമാണെങ്കിൽ അതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം എത്രയെന്ന് താങ്കൾക്ക് ബീജഗണിതത്തിൽ സമർത്ഥനാണെന്ന് അഭിമാനമുണ്ടെങ്കിൽ പറഞ്ഞാലും

സംഖ്യ $13+\sqrt{48}+\sqrt{60}+\sqrt{20}+\sqrt{44}+\sqrt{32}+\sqrt{24}$

ആറു കരണികളുള്ള സംഖ്യയായതിനാൽ വർഗ്ഗമൂലത്തിൽ 4 കരണികൾ (ഘടകങ്ങൾ) ഉണ്ടായിരിക്കും. മൂന്നു കരണീ സംഖ്യകൾ വീതം കൂട്ടിയ സംഖ്യകൾ കാണുക. കരണികളിൽ ഏറ്റവും ചെറിയ സംഖ്യകൾ 20,24,32 എന്നിവയാണ്. അവയുടെ തുക 76 ആകുന്നു. സ്ഥിരസംഖ്യാ വർഗ്ഗം = 169, അവയുടെ വ്യത്യാസം = 169 - 76 = 93 ഇതു വർഗ്ഗ സംഖ്യയല്ല. എന്നാൽ 20+24+44=88

ഇത് 169 ൽ നിന്നു കുറച്ചത് 81 ആകുന്നു. ഇതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം = 9 ഇതിൽ നിന്നും ലഭ്യമായ കരണികൾ $\frac{13+9}{2}=11, \frac{13-9}{2}=2,$ ഇവയിൽ ചെറിയ കരണിയുടെ നാലിരട്ടി (8) കൊണ്ട് കുറയക്കാനുപയോഗിച്ച സംഖ്യകളെ ഹരിക്കുമ്പോൾ

$$\frac{20}{8}=\frac{5}{2}, \quad \frac{24}{8}=3, \quad \frac{44}{8}=\frac{11}{2}$$

ഇവയും ആദ്യം കിട്ടിയ ഘടകവും ചേർത്ത സംഖ്യ

$\sqrt{2}+\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{3}+\sqrt{\frac{11}{2}}$ എന്നതാണ്.

ഇതിന്റെ വർഗ്ഗം $13+\sqrt{20}+\sqrt{24}+\sqrt{44}+\sqrt{30}+\sqrt{55}+\sqrt{66}$

ഇത് തന്നിരിക്കുന്ന സംഖ്യയിൽ നിന്നും വിഭിന്നമാണ്

$\sqrt{32}, \sqrt{48}, \sqrt{60}$ എന്നിവയ്ക്കു പകരം

$\sqrt{30}, \sqrt{55}, \sqrt{66}$ എന്നിവയാണ് ശരിയായ വർഗ്ഗ ഘടകങ്ങൾ അതിനാൽ തന്നിരിക്കുന്ന സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലം കരണികളുടെ യോഗമായി നിർണ്ണയിക്കാൻ സാധ്യമല്ല.

ഉദാഹരണം 21

ചത്വാരിംശദശീതി ദ്വി–
ശതീ തുല്യാ കരണ്യാ: ചേൽ
സപ്തദശരൂപയുക്താ:
തൽകൃതൌ കിം പദം ബ്രൂഹി

അർത്ഥം

ചത്വാരിംശത് = 40, അശീതി = 80, ദ്വിശതി = 200, സപ്തദശം = 17

സാരം

40, 80, 200 എന്നിവ കരണികളും 17 സ്ഥിരസംഖ്യയും ചേർന്ന വർഗ്ഗ സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലം എത്രയെന്നു പറയുക.

സംഖ്യാ $17+\sqrt{40}+\sqrt{80}+\sqrt{200}$

മൂന്നു കരണികളുള്ളതിനാൽ അവയിൽ രണ്ടുവീതം കൂട്ടിയ സംഖ്യകൾ കാണുക.

$$40+80=120, 40+200=240, 80+200=280$$

സ്ഥിരസംഖ്യാവർഗ്ഗം = 289, സംഖ്യാവർഗ്ഗത്തിൽ നിന്നു കുറച്ചവ = 169, 49, 9 എന്നിവയാണ് അവ എല്ലാം വർഗ്ഗസംഖ്യകളുമാണ്. അവയുടെ വർഗ്ഗമൂലം യഥാക്രമം 13, 7, 3 എന്നിവയാണ്.

$$\frac{17+13}{2}=15, \frac{17-13}{2}=2$$

$$\frac{17+7}{2}=12, \frac{17-7}{2}=5$$

$$\frac{17+3}{2}=10, \frac{17-3}{2}=7$$

ഇവയിൽ സ്ഥിരസംഖ്യ 17 കിട്ടാൻ 2, 5, 10 എന്നീ സംഖ്യകൾ വേണം. അഥവാ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ കരണിയായ 2 ന്റെ 4 ഇരട്ടികൊണ്ട് 80, 40 എന്നിവയെ ഹരിച്ചാൽ 10, 5 എന്നിവ കിട്ടും.

വർഗ്ഗമൂലം $\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}$

ഇതിന്റെ വർഗ്ഗം $17+\sqrt{40}+\sqrt{80}+\sqrt{200}$

നിർദ്ദിഷ്ട സംഖ്യ വർഗ്ഗസംഖ്യയാണ്.

അദ്ധ്യായം 5

കുട്ടക വിവരണം

ആമുഖം

$5x + 3 = 2y$ എന്നത് ഒരു ബീജഗണിത സമവാക്യമാണല്ലോ. x, y എന്നീ അജ്ഞാത ഘടകങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളോ ഗുണിതങ്ങളോ ഇതിലില്ലാത്തതിനാൽ ഇതിനെ രേഖീയ സമവാക്യമെന്നു വിളിക്കുന്നു (**Linear equation**). x നോ, yക്കോ ഏതെങ്കിലും മൂല്യം സങ്കല്പിച്ചാൽ ശേഷിക്കുന്ന ഘടകത്തിന്റെ മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കാൻ സാധിക്കും. $x = 1$ ആയാൽ y യുടെ മൂല്യം 4 എന്നാകും. $x = 3$ ആണെങ്കിൽ $y = 9$ എന്നും കണക്കാക്കാം. x ന് ഭിന്നസംഖ്യകളോ പൂർണ്ണസംഖ്യകളോ മൂല്യം സ്വീകരിച്ചാൽ y ക്ക് അതിന് അനുയോജ്യമായ മൂല്യം ലഭിക്കും. x, y എന്നിവയ്ക്ക് ധന ന്യൂന സംഖ്യകളും ആകാം. തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തിനു ചേരുന്ന വിധം x, y എന്നിവയ്ക്ക് നിരവധി മൂല്യങ്ങളുണ്ടാകുന്നതിനാൽ ഈ ബീജഗണിത വാകൃത്തിന് അനിശ്ചിത (അനിർധാര്യ) സമവാക്യമെന്നു നാമകരണം ചെയ്തിരിക്കുന്നു. ഇത്തരം ഏകഘാത അനിർധാര്യ സമവാക്യത്തിനെ $ax+c=by$ എന്ന പൊതു സമവാക്യം കൊണ്ടു പ്രതിനിധാനം ചെയ്യാം. a, b, c എന്നിവ പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളും x, y എന്നിവ അജ്ഞാത മൂല്യങ്ങളുമാണ്. x, y എന്നിവയ്ക്കു പൂർണ്ണസംഖ്യയിൽ മൂല്യ നിർണ്ണയം ചെയ്യുന്ന വിധിയാണ് കുട്ടക പ്രകരണം. കുട്ടകം എന്നാൽ പൊടിക്കുന്ന ഉപകരണം (**pulveriser**) എന്നാണ് അർത്ഥം. ഈ അധ്യായം ലീലാവതിയിലും ഉൾക്കൊള്ളിച്ചിട്ടുണ്ട്. ആര്യഭടൻ, ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ, ശ്രീധരൻ തുടങ്ങിയ പൂർവ്വാചാര്യന്മാരും കുട്ടകം തങ്ങളുടെ ഗണിതഗ്രന്ഥങ്ങളിൽ പ്രതിപാദിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഭാസ്കരൻ ഇത് കൂടുതൽ ലളിതമായി ഇവിടെ വിവരിക്കുന്നു.

കരണസൂത്രം 22

ഭാജ്യോഹാര: ക്ഷേപക: ചാപവർത്ത്യ:
കേനാപ്യാദൌ സംഭവേ കുട്ടകാർഥം
യേന ഛിന്നൌ ഭാജ്യോഹാരൌനതേന
ക്ഷേപശ്ചൈതദ് ദുഷ്ടമുദ്ദിഷ്ടമേവ

അർത്ഥം

ഭാജ്യം = ഹാര്യം (Dividend), ഹാരം = ഹാരകം (Divisior), ക്ഷേപകം = സ്ഥിരസംഖ്യ (Constant), അപവർത്ത്യ = ലഘൂകരിച്ച് (ഒരു സാമാന്യ ഘടകം കൊണ്ടു ഹരിച്ച്), കേനാപി ആദൌ = എന്തിലായാലും ആദ്യം, ദുഷ്ടം = അസ്വീകാര്യം

സാരം

ഏതു സമവാക്യത്തിലായാലും ഭാജ്യഭാജകക്ഷേപകങ്ങളെ കുട്ടക നിർധാരണത്തിന് ആദ്യമായി (സാമാന്യ ഘടകമുണ്ടെങ്കിൽ അതുകൊണ്ട് ഹരിച്ച്) ലഘൂകരിക്കണം. (ചെറുതാക്കണം) ഭാജ്യ ഭാജകങ്ങളുടെ സാമാന്യ ഘടകം ക്ഷേപകത്തിനും അനുയോജ്യമല്ലെങ്കിൽ പൊതുവായ ലഘൂകരണം സ്വീകാര്യമല്ല.

$ax + c = by$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ a, b, c, എന്നിവ യഥാക്രമം ഭാജ്യം, ഭാജകം, ക്ഷേപകം എന്നും x നെ ഗുണം അഥവാ ഗുണകം എന്നും y യെ ലബ്ധി എന്നും നാമകരണം ചെയ്തിരിക്കുന്നു. ഈ സമവാക്യനിർധാരണത്തിനുള്ള നിയമം ഇനി പറയുന്നു.

കരണസൂത്രം 23

പരസ്പരം ഭാജിതയോർ യയോർ യഃ
ശേഷഃ തയോഃ സ്യാൽ അപവർത്തനം സഃ
തേനാപവർത്തേന വിഭാജിതൌ യൌ
തൌ ഭാജ്യഹാരൌ ദൃഢസംജ്ഞകൌ സ്തഃ
മിഥോ ഭാജേൽ തൌ ദൃഢ ഭാജ്യഹാരൌ
യാവത് വിഭാജ്യ ഭവതീഹ രൂപം
ഫലാന്യധോ/ധഃ തദധോ നിവേശ്യഃ
ക്ഷേപഃ തഥാ/ന്തേ ഖം ഉപാന്തിമേന
സ്വോർധ്വോഹതേ/ന്ത്യേനയുതേ തദന്ത്യം
ത്യജേൻമുഹുഃ സ്യാൽ ഇതിരാശി യുഗ്മം
ഊർധ്വോവിഭാജ്യേന ദൃഢേന തഷ്ടഃ
ഫലം ഗുണഃ സ്യാൽ അപരോ ഹരേണ

അർത്ഥം

പരസ്പരം ഭാജിതയോ = പരസ്പരം തുടർഹരണത്തിൽ, യഃ ശേഷഃ തയോഃ = ശിഷ്ടം എത്രയാണോ അത്, ദൃഢസംജ്ഞ= സ്ഥിരസംഖ്യ, ഭവതിഹ രൂപം = ഒന്നു അവശേഷിക്കുന്നു, ഫലാനി

അധോ അധ: നിവേശ്യ = ഹരണഫലങ്ങളെ താഴെ താഴെ വച്ച്, തഥാ അന്തേ = അതിന്റെ അവസാനം (താഴെ), ഖം = പൂജ്യം, ഉപാന്ത്യം = അവസാനത്തിനു തൊട്ടുമുമ്പ്, സ്വോർദ്ധ്വാഹതേ = അതുകൊണ്ട് മുകളിലുള്ളതിനെ ഗുണിച്ച്, അന്ത്യേനയുതേ = അവസാനത്തേതു കൂട്ടി, തദന്ത്യം ത്യജേൽ = അവസാനത്തേത് ഉപേക്ഷിക്കുക, രാശി യുഗ്മം = രണ്ടു സംഖ്യകൾ, ഊർദ്ധ്വാ വിഭാജ്യേന = മുകളിലത്തെ സംഖ്യയെ ഭാജ്യം കൊണ്ടു, തഷ്ടം = തക്ഷണം ചെയ്ത് (ഹരിച്ച് ശിഷ്ടം കാണുക), അപരോ ഹരേണ = രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ ഹാരകം കൊണ്ട്, ഫലം = ലബ്ധി, ഗുണം = ഗുണകം.

സാരം

ഭാജ്യ ഭാജകങ്ങളെ പരസ്പരം തുടർച്ചയായി ഹരിച്ച് ശിഷ്ടം വരുന്ന സംഖ്യ എത്രയാണോ അതാണ് അവയുടെ അപവർത്തന ഘടകം (HCF). ആ അപവർത്തന ഘടകം കൊണ്ട് ഭാജ്യ ഭാജകങ്ങളെ ഹരിച്ചു കിട്ടുന്ന സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ കാണുക.

തുടർന്ന് ഭാജ്യ ഭാജകങ്ങളെ തുടർച്ചയായി ശിഷ്ടം ഒന്നു ലഭിക്കുന്നതുവരെ ഹരിക്കുക. ഹരണഫലങ്ങളെ താഴെ താഴെ വച്ച് അതിനു താഴെയായി ക്ഷേപകവും ഒടുവിൽ പൂജ്യവും ചേർക്കുക. ഈ വല്ലിയിൽ അവസാനത്തേതിനു തൊട്ടു മുമ്പുള്ള സംഖ്യകൊണ്ട് അതിനു തൊട്ടു മുകളിലുള്ള സംഖ്യയെ ഗുണിച്ച് താഴെയുള്ള സംഖ്യ കൂട്ടുക. ഫലം വല്ലിയിൽ മുകളിലത്തെ സംഖ്യയ്ക്കു പകരം വയ്ക്കുക. താഴെയുള്ള സംഖ്യ ഉപേക്ഷിച്ച് വല്ലിക്ക് മാറ്റം വരുത്തുക. ഈ ക്രിയ ഒടുവിൽ രണ്ടു സംഖ്യകൾ മാത്രം വല്ലിയിൽ അവശേഷിക്കുന്നതുവരെ തുടരുക.

ഈ സംഖ്യകളിൽ മുകളിലത്തേതിനെ ഭാജ്യം കൊണ്ടു ഹരിച്ചു ചെറുതാക്കിയത് ഫലവും (ലബ്ധി= y), രണ്ടാമത്തേതിനെ ഭാജകം കൊണ്ടു ഹരിച്ചു ചെറുതാക്കിയത് ഗുണവും (x) ആകുന്നു.

ഒരു ഉദാഹരണം കൊണ്ട് ഇത് വിശദമാക്കാം.

സമവാക്യം $221x + 65 = 195y$

ഇവിടെ ഭാജ്യം **221**, ഭാജകം **195**, ക്ഷേപകം **65** എന്നിവയാണ്. ഇവക്ക് 13 ഉത്തമ സാധാരണഘടകം **(Highest Common Factor)** ആകുന്നു. അതിനാൽ ആദ്യമായി സമവാക്യ ഗുണിതങ്ങളെ 13 കൊണ്ടു ഹരിച്ച് ലഘൂകരിക്കുക. ഈ ക്രിയയ്ക്കാണ് അപവർത്തനം എന്നു പറയുന്നത്.

അപവർത്തിത സമവാക്യം $17x + 5 = 15y$ എന്നാകുന്നു. ഇതിലെ ഭാജ്യം 17, ഭാജകം 15, ക്ഷേപകം 5 എന്നിവയാണ്. ഭാജ്യത്തെ ഭാജകം കൊണ്ടു ഹരിക്കുക. $17 \div 15 =$ ഹരണഫലം 1 ശിഷ്ടം 2. ഇതിലെ ശിഷ്ടം (2) കൊണ്ടു മുൻ ഹാരകത്തെ (15) ഹരിക്കുക. ഹരണഫലം 7, ശിഷ്ടം 1. ശിഷ്ടം =1 ആകുന്നതുവരെ മാത്രമേ തുടർഹരണം ചെയ്യേണ്ടതുള്ളൂ. ഓരോ ഘട്ടത്തിലും ശിഷ്ടം കൊണ്ട് മുൻഹാരകത്തെ ഹരിച്ചാണ് ഫലവും ശിഷ്ടവും കാണേണ്ടത്.

ഈ ഹരണക്രിയയിൽ 1,7 എന്നീ രണ്ടു ഹരണഫലങ്ങളാണ് ലഭിച്ചത്. ഹരണഫലങ്ങളും ക്ഷേപകവും ഏറ്റവും ഒടുവിൽ പൂജ്യവും ചേർത്ത് ഒരു വല്ലി സൃഷ്ടിക്കുക.

1
7
5
0

ഈ വല്ലിയിൽ ഉപാന്ത്യസംഖ്യ 5, കൊണ്ടു തൊട്ടു മുകളിലുള്ള സംഖ്യയെ ഗുണിച്ച് താഴെയുള്ള സംഖ്യ കൂട്ടുക അതായത്

$5 \times 7 + 0 = 35$ ഈ സംഖ്യ ഉപാന്ത്യത്തിനു മുകളിലുള്ള സംഖ്യയ്ക്കു പകരം (7) വയ്ക്കുക. വല്ലിയിലെ അന്ത്യഘടകം (പൂജ്യം) ഉപേക്ഷിച്ച് പുതുക്കിയ വല്ലി എഴുതുക.

1
35
5

ഈ പുതുക്കിയ വല്ലിയിലെ ഉപാന്ത്യസംഖ്യ 35, മുകളിലത്തെ ഘടകം 1, അന്ത്യഘടകം 5 എന്നിവയാണ്. ഉപാന്ത്യസംഖ്യ കൊണ്ട് തൊട്ടുമുകളിലത്തെ ഘടകത്തെ ഗുണിച്ച് അന്ത്യഘടകം കൂട്ടുക.

$35 \times 1 + 5 = 40$

ഈ സംഖ്യ മുകളിലത്തെ സംഖ്യയ്ക്കു പകരം വച്ച് ഒടുവിലത്തെ ഘടകം ഉപേക്ഷിച്ച് വല്ലി പുതുക്കുക. പുതുക്കിയ വല്ലി

40
35 എന്നതാണ്.

ഇതിൽ മുകളിലത്തെ സംഖ്യയെ ഭാജ്യം കൊണ്ട് ഹരിച്ച് ശിഷ്ടം കാണുക

$40 \div 17 = 2$ ശിഷ്ടം = 6 ഈ ശിഷ്ടമാണ് ലബ്ധി (y) യുടെ മൂല്യം. വല്ലിയിലെ രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ (35) യെ ഭാജകം (15) കൊണ്ടു ഹരിച്ച് ശിഷ്ടം കാണുക.

$35 \div 15 = 2$, ശിഷ്ടം 5. ഇത് ഗുണക (x) ത്തിന്റെ മൂല്യമാണ്. അതായത് $x=5$, $y=6$ എന്നത് ഒരു ഉത്തരമാകും.

$17 \times 5 + 5 = 15 \times 6$ (സമവാക്യം ശരിയാകുന്നു)

ഇവിടെ ഹരണഫലങ്ങൾ 1, 7 എന്നിങ്ങനെ രണ്ടുസംഖ്യ കളാണുള്ളത്. അതായത് ഹരണഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം രണ്ടായിരുന്നു. ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം 2, 4, 6 എന്നിങ്ങനെ ഇരട്ടസംഖ്യയായാൽ മാത്രമേ മേൽവിവരിച്ച പ്രകാരം x, y മൂല്യങ്ങൾ ശരിയാകുക യുള്ളു. ഹരണഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒറ്റ (odd) ആയാൽ ഫലങ്ങൾ കാണാനുള്ള നിയമം ഇനി പറയുന്നു.

കരണസൂത്രം 24

ഏവം തദേവാത്ര യദാ സമാപ്താഃ
സ്യുഃ ലബ്ധയഃ ചേൽ വിഷമാഃ തദാനീം
യഥാഗതൌ ലബ്ധി ഗുണൌ വിശോധ്യൌ
സ്വതക്ഷണാൽ ശേഷമിതോ തു തൌ സ്തഃ

അർത്ഥം

തദേവാത്ര = അപ്രകാരം തന്നെ ഇവിടെ, സമാപ്താഃ = സമ ആപ്താ = ഇരട്ട എണ്ണം (Even) ആണ് (ഫലം) ലഭിക്കുന്നതെങ്കിൽ, വിഷമാഃ = ഒറ്റ എണ്ണം(Odd), ശേഷമിതോ വിശോധ്യ = ശിഷ്ടം കുറച്ച്

സാരം

ഇപ്രകാരം (തക്ഷണം ചെയ്ത്) ലഭിക്കുന്ന ലബ്ധി ഗുണങ്ങൾ ഹരണഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം യുഗ്മങ്ങളാകുമ്പോൾ മാത്രം ശരിയാകുന്നതാണ്. ഹരണഫലങ്ങൾ (ഓജം) ഒറ്റയാകുമ്പോൾ ലഘൂകരണത്തിൽ ലഭിക്കുന്ന ശിഷ്ടങ്ങൾ ഭാജ്യ ഭാജകങ്ങളിൽ നിന്നും കുറച്ചു കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളാണ് ലബ്ധി ഗുണങ്ങൾ. ഇത് ഒരു ഉദാഹരണത്തിലൂടെ പരിശോധിക്കാം.

$60x + 3 = 13y$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ ഭാജ്യം = 60, ഭാജകം 13, ക്ഷേപകം 3 എന്നിവയാണ്.

തുടർ ഹരണം ശ്രദ്ധിക്കുക.

ഭാജ്യം	ഭാജകം	ഹരണഫലം	ശിഷ്ടം
60	13	4	8
13	8	1	5
8	5	1	3
5	3	1	2
3	2	1	1

ശിഷ്ടം 1 ആകുന്നതു വരെ ഹരണം തുടരുമ്പോൾ ഹരണ ഫലങ്ങൾ 4,1,1,1,1 എന്നീ അഞ്ചു സംഖ്യകൾ ലഭിക്കും. ഇത് ഒറ്റ സംഖ്യയാണ്. കുട്ടകക്രിയ ഒരോ പടിയിലും വരുന്നതു ശ്രദ്ധിക്കുക.

Stage1	Stage2	Stage3	Stage4	Stage5	Stage6
4	4	4	4	4	69
1	1	1	1	15	15
1	1	1	9	9	
1	1	6	6		
1	3	3			
3	3				
0					

ഇവിടെ അന്ത്യ സംഖ്യകൾ 69, 15 എന്നിവയാണ്. ഇതിൽ 69 നെ ഭാജ്യം (60) കൊണ്ടു ഹരിച്ച ശിഷ്ടം = 9. 15 നെ ഭാജകം 13 കൊണ്ടു ഹരിച്ച ശിഷ്ടം = 2

ഹരണഫലം ഒറ്റയായതിനാൽ ലബ്ധി ഗുണങ്ങൾ ഭാജ്യ ഭാജകങ്ങളിൽ നിന്നു കുറയ്ക്കുക. ലബ്ധി (y) = 60 - 9 = 51 എന്നും. ഗുണം $(x) = 13 - 2 = 11$ എന്നും കണക്കാക്കുന്നു.

അതായത് $60\times11+3=663.\quad 13\times51=663$

കരണസൂത്രം 25

ഭവതി കുട്ടവിധേഃ യുതിഭാജ്യയോഃ
സമപവർത്തിതയോഃ അപി വാ ഗുണഃ
ഭവതിയോ യുതിഭാജകയോഃ പുനഃ
സ ച ഭവേത് അപവർത്തന സംഗുണഃ

അർത്ഥം

ഭവതി = ആകുന്നു, യുതി = ക്ഷേപകം, കുട്ടകവിധേ = കുട്ടകവിധിയിൽ, യുതിഭാജകം = ക്ഷേപകവും ഭാജകവും,

അപവർത്തന സംഗുണ: = അപവർത്തനഘടകം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്.

സാരം

$ax + c = by$ എന്ന കുട്ടകത്തിൽ ക്ഷേപകവും ഭാജ്യവും മാത്രം ഒരു ഘടകം കൊണ്ടു അപവർത്തിച്ച് ലഭിച്ച കുട്ടകത്തിലെ ഗുണലബ്ധികളിൽ ലബ്ധിയേയും, ക്ഷേപകവും ഭാജകവും മാത്രം അപവർത്തിച്ചു ലഭിച്ച കുട്ടകത്തിലെ ഗുണലബ്ധികളിൽ ഗുണകത്തെയും അപവർത്തനഘടകം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അവയുടെ ശരിയായ മൂല്യം കാണണം (ഇതര മൂല്യങ്ങൾക്കു മാറ്റമില്ല).

ഉദാഹരണമായി $100x+90=63y$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ ഭാജ്യം 100, ക്ഷേപകം 90 എന്നിവയെ മാത്രം പൊതുഘടകമായ 10 കൊണ്ടു അപവർത്തിച്ചു ലഭിക്കുന്ന കുട്ടകം $10x + 9 = 63y$ എന്നാകും. ഈ കുട്ടകം നിർധാരണം ചെയ്യുന്നതിന് ഭാജ്യ ഭാജകങ്ങളുടെ ഹരണം ശ്രദ്ധിക്കുക.

ഭാജ്യം	ഭാജകം	ഹരണപലം	ശിഷ്ടം
10	63	0	10
63	10	6	3
10	3	3	1

ഹരണഫലങ്ങൾ 0,6,3 എന്നിങ്ങനെ 3 (ഒറ്റസംഖ്യ) എണ്ണമുണ്ട് ഫലവല്ലിയായി ഇവയും ക്ഷേപകവും ശൂന്യവും താഴെ താഴെ വച്ച് ഗുണിക്കുക.

Step1	Step2	Step3	Step4
0	0	0	27
6	6	171	171
3	27	27	
9	9		
0			

27 നെ ഭാജ്യം (10) കൊണ്ടു ഹരിച്ചതിൽ ശിഷ്ടം = 7 എന്നും 171 നെ ഭാജകം (63) കൊണ്ടു ഹരിച്ചതിൽ ശിഷ്ടം (45) എന്നും ലഭിക്കുന്നു. ഹരണഫലങ്ങൾ ഒറ്റയായതിനാൽ ഇവ ഭാജ്യ ഭാജകങ്ങളിൽ നിന്നും കുറച്ച സംഖ്യകളാണ് ലബ്ധി ഗുണങ്ങൾ. അതായത്.

$y = 10 - 7 = 3$, $x = 63 - 45 = 18$ എന്നും കുട്ടകത്തിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു. $10x + 9 = 63y$ എന്നതിന് ഈ മൂല്യം

ശരിയാകും എന്നാൽ $100x + 90 = 63y$ എന്നതിന് ഇവയിൽ ലബ്ധിയെ (3) നെ അപവർത്തനഘടകമായ 10 കൊണ്ടു ഗുണിക്കേണ്ടതുണ്ട്. ഗുണക (x)ത്തിന്റെ മൂല്യം (18) മാറുന്നില്ല. അതിനാൽ മൂല കുട്ടകത്തിന്റെ x, y മൂല്യങ്ങൾ യഥാക്രമം $x = 18$ എന്നും y = 30 എന്നും ആകുന്നു.

ഇതേ കുട്ടകത്തിൽ ക്ഷേപകം (90), ഭാജകം (63) എന്നിവയെ 9 കൊണ്ടു ഹരിച്ചു ലഘൂകരിച്ചാൽ കുട്ടകം $100x + 10 = 7y$ എന്നു മാറുന്നു. ഈ കുട്ടകത്തെ നിർധാരണം ചെയ്യുക.

ഭാജ്യം	ഭാജകം	ഹരണഫലം	ശിഷ്ടം
100	7	14	2
7	2	3	1

14, 3 എന്നീ രണ്ടു ഹരണഫലങ്ങൾ മാത്രമാണുള്ളത്, കുട്ടക ക്രിയകൾ ശ്രദ്ധിക്കുക.

Step1	Step2	Step3
14	14	430
3	30	30
10	10	
0		

430 നെ 100 (ഭാജ്യം) കൊണ്ടു ഹരിച്ച ശിഷ്ടം 30 ആണ് ലബ്ധി (y) യുടെ മൂല്യം 30 നെ 7 കൊണ്ടു ഹരിച്ച ശിഷ്ടം=2 ഇതിനെ അപവർത്തന ഘടകമായ 9 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത് = 18 ആണ് ഗുണക (x)ത്തിന്റെ മൂല്യം.

കരണസൂത്രം 26

യോഗജേ തക്ഷണാൽ ശുദ്ധേ
ഗുണാപ്തി: തോ വിയോഗജേ
ധന ഭാജ്യോദ്ഭവേ തദ്വത്
ഭവേതാം ഋണ ഭാജ്യയോ

അർത്ഥം

യോഗജേ = കൂട്ടുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന (ക്ഷേപകം ധനസംഖ്യയാകുമ്പോൾ), ഗുണാപ്തി = ഗുണ ലബ്ധികൾ (x, y മൂല്യങ്ങൾ), ശുദ്ധേ = ശുദ്ധിയാക്കിയത് (കുറച്ചത്), വിയോഗജേ = കുറയ്ക്കുമ്പോൾ (ക്ഷേപകം ന്യൂനസംഖ്യയായാൽ)

സാരം

ധനക്ഷേപകമുള്ള കുട്ടകത്തിൽ നിന്നും ലഭിക്കുന്ന ഗുണലബ്ധികൾ (x, y) ക്ഷേപകം ന്യൂനസംഖ്യയാകുമ്പോൾ ഭാജക ഭാജ്യങ്ങളിൽ നിന്നും കുറച്ച് ഗുണലബ്ധികൾ കാണണം.

ഭാജ്യം ധനസംഖ്യയാകുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഗുണലബ്ധികൾ ഭാജകഭാജ്യങ്ങളിൽ നിന്നു കുറച്ച മൂല്യങ്ങളാണ് ഭാജ്യം ന്യൂന സംഖ്യയാകുമ്പോൾ ശരിയായ ഗുണലബ്ധികൾ

ഉദാഹരണമായി $60x + 3 = 13y$ എന്ന കുട്ടകത്തിൽ x =11 എന്നും y = 51 എന്നും മൂല്യങ്ങൾ കണക്കാക്കിയിരുന്നു. ഇവിടെ ക്ഷേപകം (3) ധനസംഖ്യയാണ്. ക്ഷേപകം ന്യൂനസംഖ്യ യാകുമ്പോൾ കുട്ടകം $60x - 3 = 13y$ എന്നാകും.

ഇതിലെ മൂല്യങ്ങൾ x = 13-11=2 എന്നും. y = 60-51= 9 എന്നും ഭാജക ഭാജ്യങ്ങളിൽ നിന്നും കുറച്ച സംഖ്യകളാണ്

അതുപോലെ ഭാജ്യം (60) ന്യൂനസംഖ്യയായാൽ കുട്ടകം $-60x + 3 = 13y$ എന്നായിത്തീരും. ഇതിലെ x = 13 -11 = 2 എന്നും, y = - (60 - 51) = -9 എന്നും ഉത്തരങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു.

കരണസൂത്രം 27

ഗുണലബ്ധ്യോ സമം ഗ്രാഹ്യം
ധീമതാ തക്ഷണേ ഫലം
ഹരതഷ്ടേ ധനക്ഷേപേ
ഗുണലബ്ധീതു പൂർവ്വവൽ
ക്ഷേപ തക്ഷണ ലാഭാഢ്യാ
ലബ്ധിഃ ശുദ്ധൌ തു വർജിതാ

അർത്ഥം

സമം ഗ്രാഹ്യം = ശരിയായ മൂല്യങ്ങൾ കണക്കാക്കണം. ധീമതാ = ബുദ്ധിമാന്മാർ, ഹരതഷ്ടേ = ഹാരകം കൊണ്ടു ലഘൂകരിച്ചത്, പൂർവ്വവൽ = മുമ്പത്തേതുപോലെ, ക്ഷേപ തക്ഷണ ലാഭാഢ്യാ = ക്ഷേപത്തെ ലഘൂകരിച്ച ഫലം കൂട്ടി.

സാരം

ബുദ്ധിമാന്മാർ ലഘുകരണത്തിലും ഗുണലബ്ധികളുടെ ശരിയായ മൂല്യങ്ങൾ കണ്ടെത്തുന്നു.

ധനക്ഷേപകം ഹാരകത്തെക്കാൾ കൂടുതലായ സംഖ്യയാണെങ്കിൽ അതിനെ ഹാരകം കൊണ്ട് ഹരിച്ച ശിഷ്ടം ക്ഷേപകമാക്കി കുട്ടകത്തിന്റെ ഗുണലബ്ധികൾ കണക്കാക്കുക അതിൽ നിന്നു ലഭിക്കുന്ന ലബ്ധിയോട് ഹരണഫലം കൂട്ടി മൂല കുട്ടകത്തിന്റെ ലബ്ധി (y) കണക്കാക്കണം.

(ക്ഷേപകം ന്യൂനസംഖ്യയാണെങ്കിൽ ലബ്ധിയുടെ മൂല്യത്തിൽ നിന്നും ഹരണഫലം കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്യണം).

ഉദാഹരണമായി $100x+90=63y$ എന്നതിൽ ക്ഷേപകം 90, ഹാരകത്തേക്കാൾ (63) വലുതാണ്. ക്ഷേപകത്തെ ഹാരകം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഹരണഫലം =1 ശിഷ്ടം =27 എന്നു കിട്ടുന്നു.

ഈ സംഖ്യ പുതിയ ക്ഷേപകമാക്കിയ കുട്ടകം $100x+27=63y$ എന്നാണ് $x=18$, $y=29$ എന്നാണ് ഇതിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ.

ഇതിൽ നിന്നും $100x+90=63y$ എന്നതിൽ y യുടെ മൂല്യം കാണാൻ 29 +ഹരണഫലം = 30 എന്നു കണക്കാക്കാം. വല്ലി ഗുണിതത്തിൽ ക്ഷേപകത്തിന്റെ മൂല്യം വലുതായാൽ ഗുണനഫലം വലുതാകും. ഗുണനം ലഘുവാക്കാൻ ക്ഷേപകത്തിന്റെ മൂല്യം കുറഞ്ഞിരിക്കുന്നതാണ് നല്ലത്. അതിന് ഇവിടെ നിർദ്ദേശിച്ച മാർഗ്ഗം സഹായകമാണ്.

കരണസൂത്രം 28

അഥവാ ഭാഗഹാരേണ തഷ്ടയോഃ ക്ഷേപ ഭാജ്യയോഃ
ഗുണഃ പ്രാഗ്വൽ തതോ ലബ്ധിഃ ഭാജ്യാൽ ഹത യുതോദ്ധൃതാൽ

അർത്ഥം

ഭാഗഹാരേണ = ഭാജകം കൊണ്ട് ഹരിച്ച് ക്ഷേപ ഭാജ്യയോ = ക്ഷേപകത്തെയും ഭാജ്യത്തേയും, പ്രാഗ്വൽതതോ = മുമ്പത്തേതുതന്നെ, ഭാജ്യാൽ ഹത = ഭാജ്യം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്, യുതോ ഉദ്ധൃതാൽ = കൂട്ടി ഹരിച്ച്

സാരം

അഥവാ (മറ്റൊരു മാർഗ്ഗം) ഭാജകം കൊണ്ടു ക്ഷേപകത്തെയും ഭാജ്യത്തെയും ഹരിച്ചു ലഘൂകരിച്ച കുട്ടകത്തിൽ നിന്നു ലഭിക്കുന്ന ഗുണം (x) മുമ്പത്തെ കുട്ടകത്തിന്റെ ഗുണകം തന്നെയായിരിക്കും. ഈ മൂല്യം ഭാജ്യം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ക്ഷേപകം കൂട്ടി ഭാജകം കൊണ്ടു ഹരിച്ച് ലബ്ധി കാണണം.

ഉദാഹരണമായി $100x+90=63y$ എന്നതിൽ ഹാരം (63) കൊണ്ട് ഭാജ്യത്തെയും (100) ക്ഷേപകത്തെയും (90) ഹരിച്ച് ലഘൂകരിച്ച് ശിഷ്ടങ്ങൾ ചേർത്ത കുട്ടകം $37x+27=63y$ എന്നായിത്തീരും.

ഇതിൽ $x=18$, $y=11$ എന്നിവയാണ് ഗുണലബ്ധികൾ, ഇവയിൽ ഗുണക(x)ത്തിന്റെ മൂല്യത്തിനു മാറ്റമില്ല. അത് നിർദ്ദിഷ്ട സമവാക്യത്തിൽ ഉപയോഗിച്ച് ലബ്ധി (y) യുടെ മൂല്യം കണക്കാക്കണം. അതായത്. $100\times18+90=63y$ $y=30$ എന്ന ഉത്തരം ലഭിക്കും.

കരണസൂത്രം 29

ക്ഷേപാഭാവേƒഥവാ യത്ര ക്ഷേപഃ ശുദ്ധ്യേദ്ഹരോദ്ധൃതഃ
ജ്ഞേയഃ ശൂന്യം ഗുണഃ തത്ര ക്ഷേപോ ഹരഹൃതഃ ഫലം

അർത്ഥം

ക്ഷേപാഭാവേ = ക്ഷേപകം ഇല്ലാതിരിക്കുമ്പോൾ, ക്ഷേപ ശുദ്ധ്യേദ് ഹരോദ്ധൃത = ക്ഷേപത്തെ ഹാരകം കൊണ്ടു പൂർണ്ണമായി ഹരിക്കാവുന്നതാണ്, ക്ഷേപോഹരഹൃതം = ക്ഷേപത്തെ ഹാരകം കൊണ്ടു ഹരിച്ചത്, ഫലം = ലബ്ധി (y)

സാരം

($ax+c=by$ എന്ന കുട്ടകത്തിൽ) ക്ഷേപകം ഇല്ലാതാകുമ്പോഴോ, ക്ഷേപകം, ഹാരകം കൊണ്ടു പൂർണ്ണമായി ഹരിക്കാവുന്നതോ ആയാൽ ഗുണകം (x) ശൂന്യമായിരിക്കും. അവിടെ ലബ്ധി (y) ക്ഷേപകത്തെ ഹാരകം കൊണ്ട് ഹരിച്ച ഫലമായിരിക്കും. അതായത്.

$ax=by$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ $x=0, y=0$ എന്നും $y=\frac{ax}{b}$ എന്നും ഫലങ്ങളാകും, $ax+bm=by$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ ക്ഷേപകം bm ഹാരകം കൊണ്ടു ഹരിക്കാവുന്നതാണ് ഇവിടെ $x=0$ എന്നും $y=\frac{bm}{b}=m$ എന്നും മൂല്യങ്ങളാകും. ഗുണലബ്ധികൾക്കു നിരവധി മൂല്യങ്ങളുണ്ടാകും. അവ കണക്കാക്കാനുള്ള നിയമം ഇപ്രകാരമാണ്.

കരണസൂത്രം 30

ഇഷ്ടാഹതഃ സ്വ സ്വ ഹരേണ യുക്തേ
തേ വാ ഭവേതാം ബഹുധാ ഗുണാപ്തി

അർത്ഥം

ഇഷ്ടാഹതഃ = ഇഷ്ടമുള്ള സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചത്, ബഹുധാ = അനേകവിധത്തിൽ, ഗുണാപ്തി = ഗുണലബ്ധികൾ

സാരം

അതാതിന്റെ (ഭാജ്യ ഭാജകങ്ങളുടെ) മൂല്യങ്ങളെ ഇഷ്ട സംഖ്യ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഗുണലബ്ധികളുടെ മൂല്യത്തോടു കൂട്ടിയാൽ അവയ്ക്ക് (x, y) അനേക വിധ മൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കും. ഉദാഹരണമായി $100x + 90 = 63y$ എന്നതിന് $x=18$, $y=30$ എന്ന ഒരു ജോടി മൂല്യങ്ങൾ ലഭിച്ചു. ഇതിൽ നിന്നും അവയുടെ നിരവധി മൂല്യങ്ങൾ കാണാൻ ഭാജ്യത്തേയും ഭാജകത്തേയും ഒരു ഇഷ്ട സംഖ്യ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അവ ലബ്ധിയോടും ഗുണകത്തോടും യഥാക്രമം കൂട്ടുക. അതായത് ഇഷ്ട സംഖ്യ 'm' എന്നു സങ്കല്പിച്ചാൽ (m=1,2,3,....)

$x = 63m + 18$ എന്നും $y = 100m + 30$ എന്നും ഉത്തരങ്ങൾ ലഭിക്കും. ഇതനുസരിച്ച് മറ്റു ഏതാനും (x, y) മൂല്യങ്ങൾ ശ്രദ്ധിക്കുക. (81,130), (144, 230), (207, 330) എന്നിങ്ങനെ

ഉദാഹരണം 22

ഏകവിംശതി യുതം ശതദ്വയം
യദ്ഗുണം ഗണക പഞ്ചഷഷ്ടി യുക്
പഞ്ചവർജിത ശതദ്വയോദ്ധൃതം
ശുദ്ധിമേതി ഗുണകം വദാ*f* ശു തം

അർത്ഥം

ഏകവിംശതി = 21, ശതദ്വയം = 200, പഞ്ചഷഷ്ടി = 65, പഞ്ചവർജിതം = 5 കുറച്ചത്, ഉദ്ധൃതം = ഹരിച്ചത്.

സാരം

21 കൂട്ടിയ 200 നെ (221) ഏതു സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 65 കൂട്ടിയതിനെ 5 കുറച്ച 200 (195) കൊണ്ടു പൂർണ്ണമായി ഹരിക്കാമോ, ആ സംഖ്യ എത്രയെന്ന് ഹേ, ഗണക, വേഗം പറയുക.

$221x + 65 = 195y$ എന്ന സമവാക്യത്തിലെ x ന്റെ മൂല്യമാണ് കാണേണ്ടത്. y ഒരു പൂർണ്ണ സംഖ്യയുമായിരിക്കണം. ഇത് കരണസൂത്രം 23ന്റെ ഉദാഹരണമായി വിവരിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇതിന് $x=5$, $y=6$ എന്ന് ഒരു മൂല്യ യുഗ്മം ലഭിച്ചിരുന്നു. മറ്റു മൂല്യങ്ങൾ ഇപ്രകാരം കണക്കാക്കാം.

$x = 195m + 5$ എന്നും $y = 221m + 6$ (m=1, 2, 3, etc) എന്ന് വിവിധ മൂല്യങ്ങൾ ലഭ്യമാണ്.

ഉദാഹരണം 23

ശതം ഹതം യേനയുതം നവത്യാ
വിവർജിതം വാ വിഹൃതം ത്രിഷഷ്ട്യാ
നിരഗ്രകം സ്യാൽ വദമേ ഗുണം തം
സ്പഷ്ടം പടീയാൻ യദി കുട്ടകേf സി.

അർത്ഥം

ശതം ഹതം യേന = 100 നെ ഏതു കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്, യുതം നവത്യാ = 90 കൂട്ടി (നവതി = 90), വിവർജിതം വാ = കുറച്ചതോ, വിഹൃതം = ഹരിച്ചത്, ത്രിഷഷ്ട്യാ = 63 കൊണ്ട്, നിരഗ്രകം = ശിഷ്ടമില്ലാത്തത്, പടീയാൻ = സമർത്ഥൻ

സാരം

100 നെ ഏതു സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിനോട് 90 കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്താൽ 63 കൊണ്ടു ശിഷ്ടം വരാതെ ഹരിക്കാമോ. ആ ഗുണകം എത്രയെന്ന് കുട്ടക ക്രിയയിൽ അങ്ങ് സമർത്ഥനാണെങ്കിൽ വേഗം പറയുക.

സമവാക്യം $100x \pm 90 = 63y$ ഇതിൽ $100x \pm 90 = 63y$ എന്നതിന്റെ നിർദ്ധാരണം കരണസൂത്രം 23 ന്റെ ഉദാഹരണമായി കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്.

$x = 18$, $y = 30$ എന്നാണ് അതിന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ പൂർണ്ണാങ്ക മൂല്യങ്ങൾ. അതിന്റെ മറ്റു മൂല്യങ്ങൾ $x = 63m + 18$ എന്നും $y = 100m + 30$ എന്നുമാകുന്നു. അതുപോലെ $100x - 90 = 63y$ എന്നതിന് $x = 63 - 18 = 45$ എന്നും $y = 100 - 30 = 70$ എന്നുമാണ് ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ മൂല്യങ്ങൾ

അവയുടെ മറ്റു മൂല്യങ്ങൾ $x = 63m + 45$ എന്നും $y = 100m + 70$ എന്നുമായിരിക്കും (m = 1,2,3....)

ഉദാഹരണം 24

യദ്ഗുണാ ക്ഷയഗ ഷഷ്ടിരന്വിതാ
വർജിതാ ച യദി വാ ത്രിഭിഃ തതഃ
സ്യാൽ ത്രയോദശഹൃതാ നിരഗ്രകാ
തം ഗുണം ഗണക മേ പൃഥക് വദ

അർത്ഥം

യദ്ഗുണാ = ഏതു ഗുണകം (x); ക്ഷയഗ = ന്യൂനമായ, ഷഷ്ടി + അന്വിതം = 60 കൂട്ടി, വർജ്ജിതാ = കുറച്ചത്, ത്രിഭി: = 3, ത്രയോദശഹൃതാ = 13 കൊണ്ടു ഹരിച്ചത്, വദ = പറയുക.

സാരം

ന്യൂനസംഖ്യയായ 60 നെ ഏതു സംഖ്യ (ഗുണകം) കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 3 കൂട്ടുകയോ 3 കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്ത ഫലം 13 കൊണ്ട് ശിഷ്ടം വരാതെ ഹരിക്കാമോ, ആ സംഖ്യകൾ പ്രത്യേകം പ്രത്യേകം, ഹേ ഗണക എന്നോടു പറയുക.

സമവാക്യം $60x \pm 3 = 13y$ കരണസൂത്രം 24 ന്റെ ഉദാഹരണമായി $60x + 3 = 13y$ എന്ന കുട്ടകത്തിന്റെ (x, y) മൂല്യങ്ങൾ നിർണ്ണയിക്കുന്ന വിധം വിവരിച്ചിട്ടുണ്ട്. അതിൽ x =11, y =51 അഥവാ x = 13m + 11, y = 60m + 51 എന്നിങ്ങനെ പൊതു ഘടകങ്ങളായി നിർണ്ണയിക്കാം.

$-60x + 3 = 13y$ എന്നതിന്റെ മൂല്യനിർണ്ണയം കരണസൂത്രം 26ന്റെ ഉദാഹരണമായി കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്. x=2, y=-9 എന്നാണ് ഒരു മൂല്യ യുഗ്മം.

മറ്റു മൂല്യങ്ങൾ x = 13m + 2 എന്നും y = 60m -9 എന്നുമായിരിക്കും.

ഇനി $-60x - 3 = 13y$ എന്നതിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ. x = 13 - 2 = 11, y = -60 - (-9) = -51 എന്നും പൊതുവായി x = 13m + 11, y = - 60m -51, എന്നും സ്വീകരിക്കാം.

ഉദാഹരണം 25

അഷ്ടാദശഗുണഃ കേന, ദശാഢ്യോവാ ദശോനിതാഃ
ശുദ്ധം ഭാഗം പ്രയച്ഛന്തി ക്ഷയഗൈകാദശോദ്ധൃതഃ

അർത്ഥം

അഷ്ടാദശഗുണാ = 18 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്, കേന = ഏതു സംഖ്യകൊണ്ട്, ദശാഢ്യാ = 10 കൂടി, ദശോനിതാ = 10 കുറച്ച്, ക്ഷയഗൈകാദശോദ്ധൃത: = (ക്ഷയഗം (ന്യൂനസംഖ്യ) ഏകാദശം = 11 ഉദ്ധൃതം = ഹരിച്ചത്) = ന്യൂനസംഖ്യയായ 11 കൊണ്ടു ഹരിച്ചത്

സാരം

ഏത് സംഖ്യകൊണ്ട് 18നെ ഗുണിച്ചതിനോട് 10 കൂട്ടുകയോ അതിൽ നിന്നും 10കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്ത ഫലങ്ങൾ ന്യൂനസംഖ്യയായ 11 കൊണ്ട് പൂർണ്ണമായി ഹരിക്കാമോ ആ സംഖ്യ കാണുക.

കുട്ടകം $18x \pm 10 = -11y$

18x+10=11y എന്നതു ആദ്യം നിർധാരണം ചെയ്യുക

ഭാജ്യം = 18, ഭാജകം = 11, ക്ഷേപകം = 10

ഭാജ്യം	ഭാജകം	ഹരണഫലം	ശിഷ്ടം
18	11	1	7
11	7	1	4
7	4	1	3
4	3	1	1

ഹരണഫലങ്ങൾ 1,1,1,1 എന്നു നാലു സംഖ്യകൾ (യുഗ്മം) ആകുന്നു.

Step1	Step2	Step3	Step4	Step5
1	1	1	1	50
1	1	1	30	30
1	1	20	20	
1	10	10		
10	10			
0				

ഇതിൽ നിന്നും $y = 50 \div 18$ എന്നതിന്റെ ശിഷ്ടം=14 എന്നും $x = 30 \div 1$ എന്നതിന്റെ ശിഷ്ടം = 8 എന്നും മൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു.

ഇനി $18x + 10 = -11y$ എന്നതിന്റെ മൂല്യം $x=8$, $y=-14$ എന്നുമാകും. അഥവാ $x = -11m + 8$, $y = 18m - 14$ എന്നും പൊതുവായ ഉത്തരമാകുന്നു.

അതുപോലെ $18x - 10 = 11y$ എന്നതിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ $x = 11-8 = 3$, $y = 18 - 14 = 4$ എന്നുമായിരിക്കും. $18x - 10 = -11y$ എന്നതിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ $x=3$, $y=-4$ എന്നോ $x = -11m + 3$, $y = 18m - 4$ എന്നോ കണക്കാക്കാം.

ഉദാഹരണം 26

യേന സംഗുണിതാഃ പഞ്ച ത്രയോവിംശതി സംയുതാഃ
വർജിതാ വാ ത്രിഭിർഭക്താ നിരഗ്രാഃ സ്യുഃ സ കോഗുണഃ

അർത്ഥം

യേന സംഗുണിതാ: പഞ്ച $=5$ നെ ഏതു സംഖ്യ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ത്രയോവിംശതി $=23$, സംയുതാ = കൂട്ടിയത്, വർജിതാ = കുറച്ചത്, ത്രിഭിർ ഭക്താ $=3$ കൊണ്ടു ഹരിച്ചത്, നിരഗ്രാ = ശിഷ്ട മില്ലാത്തത്, സ്യു = ആകുന്നു; സ കോ ഗുണഃ = അത് ഏതു ഗുണകമാകുന്നു?

സാരം

5നെ ഏതു സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിനോട് 23 കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്ത് 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ട മില്ലാതാകുന്നുവോ, ആ സംഖ്യ ഏത്?

കുട്ടകം $=5x\pm23=3y$

$5x+23=3y$ എന്നതിൽ ഭാജ്യം =5, ഭാജകം=3, ക്ഷേപകം =23 എന്നതാണ്. ഇതിൽ ക്ഷേപകം ഭാജകത്തേക്കാൾ കൂടുതലായതിനാൽ കുട്ടകത്തിലെ ക്ഷേപകം അപവർത്തനം ചെയ്യാം. 23 നെ 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചതിൽ ഹരണഫലം= 7, ശിഷ്ടം= 2 എന്നു കിട്ടുന്നു. ഇതിലെ ശിഷ്ടം പുതിയ ക്ഷേപകമായി ലഭിക്കുന്ന കുട്ടകം $5x+2=3y$ എന്നാണ്. ഇതിന്റെ മൂല്യ നിർണ്ണയം ഇപ്രകാരം ചെയ്യാം

ഭാജ്യം	ഭാജകം	ഹരണഫലം	ശിഷ്ടം
5	3	1	2
3	2	1	1

ഹരണഫലങ്ങൾ 1,1 എന്നിങ്ങനെ രണ്ടെണ്ണമാണ്

Step 1	Step 2	Step 3
1	1	4
1	2	2
2	2	
0		

ഇതിൽ $y=4$, $x=2$ എന്ന ഉത്തരം

$5x+23=3y$ എന്നതിൽ x ന്റെ മൂല്യം മാറ്റമില്ല. y യുടെ മൂല്യം പുതുക്കിയ കുട്ടകത്തിലെ മൂല്യത്തോട് ക്ഷേപം ലഘൂകരിച്ച ഹരണഫലം കൂട്ടിയതാകുന്നു. അതായത്,

$x = 2,\ y = 4 + 7 = 11$

പൊതു മൂല്യങ്ങൾ $x = 3m + 2,\ y = 5m + 11$

ഇനി $5x - 2 = 3y$ എന്നതിന്റെ ഉത്തരങ്ങൾ

$x = 3 - 2 = 1,\ y = 5 - 4 = 1$ എന്നും

$5x - 23 = 3y$ എന്നതിൽ

$x = 1$ (മാറ്റമില്ല) $y = 1 - 7 = -6$ എന്നുമാകാം

അഥവാ $x = 3m + 1$ എന്നും $y = 5m - 6$ എന്നും പൊതുവായ മൂല്യങ്ങളാകുന്നു. y യുടെ മൂല്യം ധനസംഖ്യയാകാൻ m=2 എന്നു സങ്കല്പിക്കണം അതനുസരിച്ച് x=7, y=4 എന്നുള്ള ധന മൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 27

യേന പഞ്ചഗുണിതാഃ ഖ സംയുതാഃ പഞ്ചഷഷ്ടിസഹിതാഃ ച തേ/ഥവാ
സ്യുഃ ത്രയോദശഹൃതാ നിരഗ്രകാ, തംഗുണം ഗണക കീർ തയാ/ശുമേ

അർത്ഥം

പഞ്ചഗുണിതാ = 5 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്, ഖ സംയുതാഃ = പൂജ്യം കൂട്ടിയത്, പഞ്ചഷഷ്ടിസഹിതം = 65 കൂട്ടിയത്, ത്രയോദശഹൃതാ = 13 കൊണ്ടു ഹരിച്ചത്.

സാരം

ഏതു ഗണകത്തെ 5 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിനോട് പൂജ്യമോ അഥവാ 65 എന്നതോ കൂട്ടിയത് 13 കൊണ്ടു (പൂർണ്ണമായി) ശിഷ്ടമില്ലാതെ ഹരിക്കാമോ, അത് എത്രയെന്നു എന്നോടു വേഗം പറഞ്ഞാലും

കുട്ടകം $5x + 0 = 13y$

$x = 0,\ y = 0$ എന്ന ഒരു ഉത്തരം സ്വീകാര്യമാണ് (ക്ഷേപകം ശൂന്യമായതിനാൽ) അഥവാ പൊതുവായി

$x = 13m$ എന്നും $y = 5m$ എന്നും മൂല്യങ്ങൾ കാണാം

$5x + 65 = 13y$

ഇവിടെ ക്ഷേപകം (65), ഹാരക (13)ത്തിന്റെ ഗുണിതമാണ് അതിനാൽ $x = 0,\ y = 5$ എന്നും, പൊതുവായി

$x = 13m$ എന്നും $y = 5m + 5$ എന്നും മൂല്യങ്ങൾ കാണാം

സ്ഥിരകുട്ടകം

കുട്ടകത്തിലെ ക്ഷേപകത്തിന്റെ മൂല്യം 1 എന്നായാൽ ആ കുട്ടകത്തെ സ്ഥിര കുട്ടകമെന്നു പറയുന്നു. ഇത്തരം കുട്ടകത്തിൽ നിന്നും മറ്റു കുട്ടകങ്ങളുടെ മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കാൻ എളുപ്പമാണ്. അതിനുള്ള മാർഗ്ഗം ഇപ്രകാരമാണ്.

കരണസൂത്രം 31

ക്ഷേപം വിശുദ്ധിം പരികൽപ്യ രൂപം
പൃഥക് തയോർവാ ഗുണകാര ലബ്ധി
അഭീപ്സിത ക്ഷേപ വിശുദ്ധി നിഘ്നേ
സ്വഹാരതഷ്ടേ ഭവതഃ തയോഃ സ്തേ

അർത്ഥം

രൂപം = 1, തയോർഗുണകാര ലബ്ധി = അതിന്റെ ഗുണ ലബ്ധികൾ, അഭീപ്സിത ക്ഷേപം = ഇഷ്ടമുള്ള ക്ഷേപകം, സ്വഹാര തഷ്ടേ = അതാതിന്റെ ഹാരം കൊണ്ടു ഹരിച്ചു ചെറുതാക്കി.

സാരം

കുട്ടകത്തിലെ ക്ഷേപകത്തിന്റെ മൂല്യം = 1 എന്നു സങ്കല്പിച്ച് ഗുണലബ്ധി (x, y)കൾ കണക്കാക്കുക. ആവശ്യമുള്ള ക്ഷേപകം കൊണ്ട് അവയെ ഗുണിച്ച് തക്ഷണം ചെയ്ത് ആ ക്ഷേപകം ഉള്ള കുട്ടകത്തിന്റെ ഗുണലബ്ധികൾ (ഭാജ്യ ഭാജകങ്ങൾ കൊണ്ട് ഹരിച്ച് ചെറുതാക്കിയ ശിഷ്ടങ്ങളായി) സ്വീകരിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി $5x + 2 = 3y$ എന്നതിൽ ക്ഷേപകത്തിന്റെ മൂല്യം 1 എന്നു സങ്കല്പിച്ചാൽ $5x + 1 = 3y$ എന്ന കുട്ടകം ലഭിക്കും. ഇതിന്റെ x, y മൂല്യങ്ങൾ $x = 1$, $y = 2$ എന്നായിരിക്കും. അവയിൽ നിന്നും $5x + 2 = 3y$ എന്നതിന്റെ x, y മൂല്യങ്ങൾ കാണാൻ ക്ഷേപകത്തിന്റെ ഗുണിതമായ 2 കൊണ്ട് $x = 1$, $y = 2$ എന്നിവയെ ഗുണിക്കുക. അതായത് $5x + 2 = 3y$ എന്നതിന് $x = 1 \times 2 = 2$, $y = 2 \times 2 = 4$ എന്നും മൂല്യങ്ങൾ കണക്കാക്കാം.

$5x + 23 = 3y$ എന്നതിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ ഇപ്രകാരം കണക്കാക്കുമ്പോൾ $x = 1 \times 23 = 23$ എന്നും $y = 2 \times 23 = 46$ എന്നും ഉത്തരങ്ങളുണ്ടാകും. അവയെ ഭാജ്യ ഭാജകങ്ങൾ കൊണ്ടു ഹരിച്ചു ലഘൂകരിച്ച ശിഷ്ടം കാണുക. അവയായിരിക്കും ഏറ്റവും

കുറഞ്ഞ മൂല്യങ്ങൾ അതായത്,

$x = 23 \div 3$, ഹരണഫലം =7, ശിഷ്ടം =2

$y = 46 - 7 \times 5 = 11$

$x = 2,\ y = 11$ എന്നിങ്ങനെ മൂല്യങ്ങൾ കണക്കാക്കാം.

ഗ്രഹഗണിതകുട്ടകം

ഗ്രഹഗണിതത്തിൽ വികല, കല അധിമാസം മുതലായവ കണക്കാക്കാനുള്ള കുട്ടകം ഇവിടെ വിവരിക്കുന്നു.

കരണസൂത്രം 32

കല്പ്യാഥ ശുദ്ധിഃ വികലാവശേഷം
ഷഷ്ടിഃ ച ഭാജ്യഃ കുദിനാനിഹാരഃ
തജ്ജം ഫലം സ്യുഃ വികലാ ഗുണാസ്തു
ല്പ്താഗ്രമസ്മാൽ ച കലാ ലവാഗ്രം
ഏവം തദൂർദ്ധ്വം ച തഥാf ധിമാസാ
വമാഗ്രകാഖ്യോ ദിവസാ രവീന്ദോഃ

അർത്ഥം

വികലാവശേഷം = വികലാശിഷ്ടം, കുദിനം = ഭൂദിനം (യുഗത്തിലെ), വികലാഗുണഃതു = വികല ഗുണകാരം (x) ആകുന്നു. രവീന്ദോ ദിവസോ = സൂര്യ ചന്ദ്ര ദിവസങ്ങൾ, ശുദ്ധിഃ = ന്യൂന സംഖ്യ (കുറച്ചത്)

സാരം

ഭാജ്യം അറുപതും ഭാജകം ഭൂദിനങ്ങളു (യുഗത്തിലെ) മായും വികലാവശേഷം ന്യൂനക്ഷേപകവുമായുള്ള കുട്ടകത്തിലെ ഗുണകം കലാവശേഷവും ലബ്ധി വികലയുമായി കണക്കാക്കാം. ഇതിൽ നിന്നും കലയും ലിപ്താഗ്രവും മറ്റും കണക്കാക്കാം. ഇതേപോലെ. അധിമാസവും അവമാഗ്രകവും കഴിഞ്ഞുപോയ സൂര്യദിനങ്ങളും ചന്ദ്രദിനങ്ങളും ലഭിക്കുന്നു.

കുട്ടകങ്ങൾ

60 × കലാവശേഷം – വികലാവശേഷം = കുദിനം × വികലകൾ
60 × ഭാഗശിഷ്ടം – കലാശിഷ്ടം = കുദിനം × കലകൾ
30 × രാശിശിഷ്ടം – ഭാഗശിഷ്ടം = കുദിനം × ഭാഗകൾ
12 × ഭഗണശിഷ്ടം – രാശിശിഷ്ടം = കുദിനം × രാശികൾ
യുഗഭഗണം × അഹർഗണം – ഭഗണശിഷ്ടം = കുദിനം × ഭഗണങ്ങൾ

ജ്യോതിശാസ്ത്ര സംബന്ധികളായ കുട്ടകങ്ങളുടെ രൂപമാണ് മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ളത്.

സംശ്ലിഷ്ട കുട്ടകം

ഒരേ ഭാജകങ്ങളുള്ള രണ്ടു കുട്ടകങ്ങളിൽ ഭാജ്യങ്ങളുടെ തുക പുതിയ ഭാജ്യമായും ക്ഷേപകങ്ങളുടെ തുക ക്ഷേപകമായും അതേ ഭാജകവും ഉപയോഗിച്ച കുട്ടകമാണ് സംശ്ലിഷ്ട കുട്ടകമെന്നത്

$a_1x+c_1=by$ എന്നും $a_2x+c_2=by$ എന്നുമുള്ള രണ്ടു കുട്ടകങ്ങൾ സങ്കല്പിക്കുക.

അവയിൽ ആദ്യത്തേതിനു $(x,y$ മൂല്യങ്ങൾ (p_1,q_1) എന്നും രണ്ടാമത്തേതിന്റേത് p_2,q_2 എന്നുമാണെന്നും കണക്കാക്കിയാൽ $(a_1+a_2)x+(c_1+c_2)=by$ എന്ന സംശ്ലിഷ്ട കുട്ടകത്തിൽ $x=p_1+p_2$ എന്നായിരിക്കും.

കരണസൂത്രം 33

ഏകോഹരഃ ചേൽ ഗുണകൗ വിഭിന്നോ
തദാ ഗുണൈക്യം പരികൽപ്യ ഭാജ്യം
അഗ്രൈക്യം അഗ്രം കൃത ഉക്തവദ്യഃ
സംശ്ലിഷ്ട സംജ്ഞഃ സ്ഫുട കുട്ടകാfസൌ

അർത്ഥം

ഏകോഹരഃ = ഹാരകം ഒന്നു തന്നെ, അഗ്രൈക്യം = ക്ഷേപകങ്ങളുടെ തുക

സാരം

ഒരേ ഹാരകവും വിഭിന്ന ഭാജ്യങ്ങളുമുള്ള രണ്ടു കുട്ടകങ്ങളിൽ നിന്നും ഭാജ്യങ്ങളുടെ തുക നൂതന ഭാജ്യമായും ക്ഷേപകങ്ങളുടെ തുക ക്ഷേപകമായും ലഭിക്കുന്ന കുട്ടകം സംശ്ലിഷ്ട കുട്ടകം എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണമായി $5x+2=3y$ എന്നതിൽ $x=2$, എന്നും $y=4$ എന്നും $8x+2=3y$ എന്നതിൽ $x=2$ എന്നും $y=6$ എന്നും ഉത്തരങ്ങൾ ഉണ്ടാകും. ഇവയുടെ സംശ്ലിഷ്ട കുട്ടകം $13x+4=3y$ എന്നതിൽ $x=2$ എന്നത് ശരിയാകും. y യുടെ മൂല്യം 10 എന്നും ഇതിൽ നിന്നും കാണാം.

ഉദാഹരണം 28

കഃ പഞ്ചനിഘ്നാ വിഹൃതഃ ത്രിഷഷ്ട്യാ
സപ്താവശേഷോ/ഥ സ ഏവ രാശിഃ
ദശാഹതഃ സ്യാൽ വിഹൃതഃ ത്രിഷഷ്ട്യാ
ചതുർദശാഗ്രോ വദ രാശിമേനം

അർത്ഥം

പഞ്ചനിഘ്നാ = 5 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്, വിഹൃതം = ഹരിച്ചത്, ത്രിഷഷ്ട്യാ = 63 കൊണ്ട്, സപ്താവശേഷം = 7 ശിഷ്ടം, ദശാഹത = 10 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്, ചതുർദശാഗ്രം = 14 ശിഷ്ടം.

സാരം

ഏതു സംഖ്യയെ 5 കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് 63 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 7 ശിഷ്ടമാകുകയും 10 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 63 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 14 ശിഷ്ടമുണ്ടാകുകയും ചെയ്യുന്നുവോ ആ രാശി ഏതെന്നു പറയുക.

അതായത് $5x - 7 = 63y$ എന്നും

$10x - 14 = 63y$ എന്നുമുള്ള കുട്ടകങ്ങളിൽ നിന്നും സംശ്ലിഷ്ട കുട്ടകം $15x - 21 = 63y$ എന്നുമാകാം

$5x - 7 = 63y$ എന്നതിൽ x ന്റെ മൂല്യം $=14$, $y = 1$ എന്നും $10x - 14 = 63y$ എന്നതിൽ $x = 14$, $y = 2$ എന്നുമാകുന്നു. സംശ്ലിഷ്ട കുട്ടകത്തിൽ $15x - 21 = 63y$ എന്നതിൽ $x = 14$ എന്നും $y = 3$ എന്നും ഉത്തരം ലഭിക്കുന്നു.

അദ്ധ്യായം 6

വർഗ്ഗപ്രകൃതി

ആമുഖം

$ax^2+b=y^2$ എന്നത് ഒരു ദ്വിഘാത സമവാക്യമാണ് (Second degree equation) ഇതിൽ a,b എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങളും x, y എന്നിവ അവ്യക്ത ഘടകങ്ങളുമായിരിക്കും. a എന്നത് പ്രകൃതി എന്നും b എന്നത് ക്ഷേപകം എന്നും അറിയപ്പെടുന്നു. സാധാരണയായി a ഒരു അവർഗ്ഗ സംഖ്യയായിരിക്കും. x, y എന്നിവയിൽ x ന്റെ മൂല്യം y യുടേതിനേക്കാൾ കുറവായിരിക്കും. ഈ സമവാക്യത്തിനു യോജിക്കുന്ന വിധം x, y യുഗ്മങ്ങളുടെ അനേകം മൂല്യങ്ങൾ കാണാവുന്നതാണ്. ഒന്നിലധികം മൂല്യങ്ങൾ ഉള്ള ഈ സമവാക്യത്തിനെ അനിർധാര്യ സമവാക്യം (Indeterminate equation) എന്നു വിളിക്കുന്നു. ഈ സമവാക്യത്തിലെ ആദ്യ ഘടകം ഒരു സ്ഥിരാങ്കമായ 'a' (പ്രകൃതി), x എന്ന സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം എന്നിവയുടെ ഗുണിതമാകയാൽ ഇത്തരം സമവാക്യങ്ങളെ വർഗ്ഗപ്രകൃതി എന്ന പ്രത്യേക വിഭാഗത്തിൽ ഉൾപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. ഇതിലെ ക്ഷേപകം b ധനസംഖ്യയോ ന്യൂനസംഖ്യയോ ആകാം. അജ്ഞാത ഘടകങ്ങളിൽ മൂല്യം കുറവായ ഘടകത്തെ (x) ഹ്രസ്വമൂലം എന്നും, മൂല്യം കൂടിയ ഘടകത്തെ (y) ജ്യേഷ്ഠമൂലം എന്നും പറയുന്നു. നിർദ്ദിഷ്ട സമവാക്യത്തിലെ ഹ്രസ്വ ജ്യേഷ്ഠ മൂലങ്ങൾ കാണാനുള്ള ഗണിതക്രിയയാണ്. ഈ അധ്യായത്തിലെ പ്രതിപാദ്യം. 18-ാം നൂറ്റാണ്ടുവരെ പാശ്ചാത്യ ഗണിതജ്ഞർക്ക് കീറാമുട്ടിയായിരുന്ന ഇത്തരം സമവാക്യങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണരീതി ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ ഭാസ്കരാചാര്യൻ (രണ്ടാമൻ) എന്നിവർ ആവിഷ്കരിച്ചിരുന്നു. ചില പ്രത്യേക വിഭാഗത്തിലുള്ള സമവാക്യങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം ഭാവന എന്ന നാമധേയത്തിൽ ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ ബ്രഹ്മസ്ഫുട സിദ്ധാന്തത്തിൽ വിവരിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഭാസ്കരാചാര്യൻ ഇതിന് പൊതുവായ ഒരു നിർദ്ധാരണ ക്രമം ചക്രവാളം എന്ന പേരിൽ കണ്ടുപിടിച്ചു. ഈ രണ്ടു സമ്പ്രദായങ്ങളും സംയോജിച്ചുള്ള സമവാക്യ നിർദ്ധാരണം ഗണിത വിജ്ഞാന രംഗത്ത് ഭാരതീയാചാര്യന്മാരുടെ അമൂല്യസംഭാവനയായി പരിഗണിക്കപ്പെടുന്നു. $ax^2 \pm b = y^2$ എന്നതിനെ ബ്രഹ്മഗുപ്ത ഭാസ്കര സമവാക്യം എന്നു നാമകരണം ചെയ്യുന്നതായിരിക്കും അഭികാമ്യം.

കരണസൂത്രം 34

ഇഷ്ടം ഹ്രസ്വം തസ്യ വർഗ്ഗഃ പ്രകൃത്യാ
ക്ഷുണ്ണോ യുക്തോ വർജിതാ വാ സയേന
മൂലം ദദ്ധ്യാത് ക്ഷേപകം തം ധനർണ്ണേ
മൂലം തൽ ച ജ്യേഷ്ഠമൂലം വദന്തി

അർത്ഥം

ഹ്രസ്വം = ഹ്രസ്വമൂലം (x), പ്രകൃത്യാ = പ്രകൃതി (സ്ഥിരസംഖ്യ) കൊണ്ട്, ക്ഷുണ്ണം = ഗുണിച്ചത്, യുക്തോ= കൂട്ടിയത്, വർജിതാ = കുറച്ചത്, ഇഷ്ടം = ഇഷ്ട സംഖ്യ, മൂലംദദ്ധ്യാത് = വർഗ്ഗമൂലം തരുന്നു, ധനർണ്ണം = ധനന്യൂനത്വം, ജ്യേഷ്ഠമൂലം = കൂടിയ മൂല്യമുള്ള സംഖ്യ (y), ക്ഷേപകം = സ്ഥിരാങ്കം.

സാരം

ഹ്രസ്വമൂലത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ ഇഷ്ടമുള്ള ഒരു പ്രകൃതി (സ്ഥിരസംഖ്യ) കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് ഒരു ക്ഷേപകം (സ്ഥിരാങ്കം) കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്തത് ഒരു വർഗ്ഗമൂലം തരുമെങ്കിൽ ആ വർഗ്ഗമൂലത്തെ ജ്യേഷ്ഠമൂലമെന്ന് പറയുന്നു. ക്ഷേപകം ധനസംഖ്യയോ ന്യൂനസംഖ്യയോ ആകാം. $ax^2 \pm b = y^2$ എന്നതിൽ a = 8 എന്നും b = 1 എന്നും സങ്കല്പിച്ചാൽ $8x^2+1=y^2$ എന്ന സമവാക്യം ലഭിക്കും. ഇതിൽ ഹ്രസ്വമൂലം $x = 1$ എന്നും ജ്യേഷ്ഠമൂലം y = +3 എന്നും ഗുണകങ്ങൾ കാണാൻ സാധിക്കും. മറ്റൊരു മൂലജോടികൾ $x = 6$, y = 17 എന്നും ആകാം. അത്തരം അനേകം ഹ്രസ്വ ജ്യേഷ്ഠ മൂലങ്ങൾ ഈ സമവാക്യത്തിനു കണ്ടെത്താനാകും.

കരണസൂത്രം 35

ഹ്രസ്വജ്യേഷ്ഠ ക്ഷേപകാൻ ന്യസ്യ തേഷാം
താൻ അന്യാന്യോഽധോ നിവേശ്യ ക്രമേണ
സാധ്യാന്യോഭ്യോ ഭാവനാഭിഃ ബഹൂനി
മൂലാന്യേഷാം ഭാവനാ പ്രോച്യ തേഽതഃ
വജ്രാഭ്യാസൗ ജ്യേഷ്ഠലബ്ധ്വാഃ തദൈക്യം
ഹ്രസ്വം ലബ്ധ്വോരാഹതിഃ ച പ്രകൃത്യാ
ക്ഷുണ്ണാ ജ്യേഷ്ഠാഭ്യാസയുക് ജ്യേഷ്ഠമൂലം
തത്രാഭ്യാസഃ ക്ഷേപയോഃ ക്ഷേപകഃ സ്യാൽ

ഹൃസ്വം വജ്രാഭ്യാസയോരന്തരം വാ
ലബ്ധയോർഘാതോ യഃ പ്രകൃത്യാ വിനിഘ്നഃ
ഘാതോ യഃ ച ജ്യേഷ്ഠയോഃ തദ് വിയോഗോ
ജ്യേഷ്ഠം ക്ഷേപോഽത്രാപി ച ക്ഷേപഘാതഃ

അർത്ഥം

ന്യസ്യ = സ്ഥാപിച്ച് (വിന്യസിച്ച്), അന്യാന്യോഽധോ = ഒന്നൊന്നിനു താഴെ, നിവേശ്യ = ചേർത്ത്, അന്യോഭ്യോ = മറ്റു ഒന്നിന്റെ (സമവാക്യത്തിന്റെ) മൂലങ്ങൾ, ബഹൂനിമൂലാനി = അനവധിമൂലങ്ങൾ, പ്രോച്യതേ = പറയപ്പെടുന്നു. വജ്രാഭ്യാസം = കുറുകെയുള്ള ഗുണങ്ങൾ (Cross multiplication) ജ്യേഷ്ഠ ലബ്ധോ = ജ്യേഷ്ഠ ഹൃസ്വമൂലങ്ങൾ, തദൈക്യം = അവയുടെ തുക. ലബ്ധോ രാഹതി = ഹൃസ്വ മൂലങ്ങളുടെ ഗുണിതം, പ്രകൃത്യാക്ഷുണം = പ്രകൃതികൊണ്ട് ഗുണിച്ചത്, ജ്യേഷ്ഠാ ഭ്യാസയുക് = ജ്യേഷ്ഠമൂലങ്ങളുടെ ഗുണിതം കൂട്ടിയത്, അത്രാഭ്യാസ ക്ഷേപയോ = ക്ഷേപകങ്ങളുടെ നേർ ഗുണിതം. വജ്രാഭ്യാസയോരന്തരം = കുറുകെ ഗുണിച്ചവയുടെ വ്യത്യാസം, അത്രാപി ച = ഇവിടെയും, ക്ഷേപഘാതം = ക്ഷേപകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം,

സാരം

ഹൃസ്വമൂലം, ജ്യേഷ്ഠമൂലം, ക്ഷേപകം എന്നിവ ക്രമത്തിൽ എഴുതുക. അവയ്ക്കു താഴെ മറ്റൊരു സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ ക്രമത്തിൽ എഴുതുക. (ഒരേ പ്രകൃതിയും വ്യത്യസ്ത ക്ഷേപകങ്ങളുമുള്ള സമവാക്യങ്ങളുടെ ഓരോന്നിന്റെയും ഒരു ജോഡി ഹൃസ്വ ജ്യേഷ്ഠ മൂലങ്ങൾ ഭാവന കൊണ്ടു കാണണം) ഇവയിൽ നിന്നും അനേകം മറ്റു ഹൃസ്വ ജ്യേഷ്ഠ മൂലങ്ങൾ കാണുന്നതിനെ 'ഭാവന' എന്നു പറയുന്നു.

അവയുടെ ജ്യേഷ്ഠ ഹൃസ്വ മൂലങ്ങൾ കുറുകെ ഗുണിച്ച് കൂട്ടിയത് പുതിയ സമവാക്യത്തിന്റെ ഹൃസ്വമൂലമാകുന്നു.

ഹൃസ്വമൂലങ്ങളുടെ ഗുണിതത്തെ പ്രകൃതി കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് ജ്യേഷ്ഠമൂലങ്ങളുടെ ഗുണിതവും കൂട്ടിയതാണ് പുതിയ സമവാക്യത്തിന്റെ ജ്യേഷ്ഠമൂലം. പുതിയ സമവാക്യത്തിന്റെ ക്ഷേപകം മുൻ സമവാക്യങ്ങളിലെ ക്ഷേപകങ്ങളുടെ ഗുണിതമാകുന്നു.

അഥവാ പുതിയ സമവാക്യത്തിന്റെ ഹൃസ്വമൂലം, ഹൃസ്വ ജ്യേഷ്ഠ മൂല ങ്ങൾ കുറുകെ ഗുണിച്ചവയുടെ അന്തരവുമാകാം.

ഹ്രസ്വമൂലങ്ങളുടെ ഗുണിതത്തെ പ്രകൃതികൊണ്ടു ഗുണിച്ചതും ജ്യേഷ്ഠമൂലങ്ങളുടെ ഗുണിതവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമായിരിക്കും പുതിയ സമവാക്യത്തിന്റെ മറ്റൊരു ജ്യേഷ്ഠമൂലം, ഇവിടെയും ക്ഷേപകങ്ങളുടെ ഗുണിതമാണ് പുതിയ ക്ഷേപകം. പ്രകൃതി എല്ലാ സമവാക്യങ്ങളിലും ഒന്നു തന്നെ.

ഇവിടെ $ax^2+b_1=y^2$ എന്നും $ax^2+b_2=y^2$ എന്നുമുള്ള രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളിൽ പ്രകൃതി (a) ഒരു പോലെയും ക്ഷേപകങ്ങൾ (b_1,b_2) വ്യത്യസ്തങ്ങളുമാണ്. രണ്ടു സമവാക്യങ്ങൾക്കും പ്രത്യേകം യോജ്യമായ ഹ്രസ്വജ്യേഷ്ഠമൂലങ്ങൾ കാണുക.

ഒരേ പ്രകൃതിയും ക്ഷേപകങ്ങളുടെ ഗുണിതം പുതിയ ക്ഷേപകവുമായ സമവാക്യമാണ് $ax^2+b_1b_2=y^2$ എന്നത്. ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ x,y മൂല്യങ്ങൾ കാണുന്നതിനുള്ള രണ്ടു മാർഗ്ഗങ്ങൾ ഇവിടെ പറയുന്നു.

സമവാക്യം	ഹ്രസ്വമൂലം	ജ്യേഷ്ഠമൂലം
$ax^2+b_1=y^2$	α_1	β_1
$ax^2+b_2=y^2$	α_2	β_2
$ax^2+b_1b_2=y^2$	$\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1$	$a\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2$
	$\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$	$a\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2$

ഉദാഹരണമായി $8x^2+1=y^2$ എന്നതിൽ $x=1,\ y=3$ എന്നും $8x^2+4=y^2$ എന്നതിൽ $x=2,\ y=6$ എന്നും അനായാസേന മൂല്യങ്ങൾ കാണാം.

$8x^2+1\times4=y^2$ എന്നതിന്റെ മറ്റു $x,\ y$ മൂല്യങ്ങൾ $x=1\times6\pm3\times2=12$ അഥവാ 0 എന്നും $y=8\times1\times2\pm3\times6=34$ അഥവാ -2 എന്നും ഭാവനാരീതി ഉപയോഗിച്ച് കാണാൻ സാധിക്കും.

കരണസൂത്രം 36

ഇഷ്ടവർഗ്ഗഹതഃ ക്ഷേപഃക്ഷേപഃ സ്യാൽ ഇഷ്ടഭാജിതേ
മൂലേ തേ സ്തോ/ഥവാ ക്ഷേപക്ഷുണ്ണഃ ക്ഷുണ്ണേ തദാ പദേ

അർത്ഥം

ഇഷ്ടവർഗ്ഗ ഹതഃ ക്ഷേപം = ഇഷ്ടസംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച ക്ഷേപം, ഇഷ്ടഭാജിതേ മൂലേതേ = അവയുടെ (ഹ്രസ്വ ജ്യേഷ്ഠ) മൂലങ്ങളെ ഇഷ്ടസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചത്, ക്ഷേപഃ ക്ഷുണ്ണം = ക്ഷേപത്തെ (ഇഷ്ടവർഗ്ഗം കൊണ്ടു) ഗുണിച്ചത്, പദേ ക്ഷുണ്ണേ = വർഗ്ഗമൂലം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്.

സാരം

സമവാക്യത്തിലെ ക്ഷേപകം ഒരു ഇഷ്ടസംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച സംഖ്യയായാൽ ആ കുട്ടകത്തിന്റെ ഹ്രസ്വ ജ്യേഷ്ഠ മൂലങ്ങളെ ഇഷ്ട സംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലങ്ങൾ ക്ഷേപകത്തെ ഇഷ്ടസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ച സമവാക്യത്തിലെ ഹ്രസ്വ ജ്യേഷ്ഠ മൂലങ്ങൾ ആകുന്നു.

അഥവാ നിർദ്ദിഷ്ട സമവാക്യത്തിലെ ക്ഷേപകത്തെ ഇഷ്ടവർഗ്ഗ സംഖ്യ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ് പുതിയ ക്ഷേപകമെങ്കിൽ ആ സമവാക്യത്തിലെ ഹ്രസ്വജ്യേഷ്ഠ മൂലങ്ങൾ കാണാൻ മുൻ സമവാക്യത്തിലെ മൂലങ്ങളെ ഇഷ്ടസംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ മതി.

ഉദാഹരണമായി $8x^2+4=y^2$ എന്നതിൽ $x = 2$, $y = 6$ എന്നാണല്ലോ. ഇതിലെ ക്ഷേപകം ഒരു വർഗ്ഗസംഖ്യയാണ്. ക്ഷേപകത്തെ ആ വർഗ്ഗസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ സമവാക്യം $8x^2+1=y^2$ എന്നായി മാറും.

ഇതിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ കാണാൻ മുൻ സമവാക്യത്തിന്റെ മൂലങ്ങളെ ഇഷ്ടസംഖ്യ (വർഗ്ഗസംഖ്യയുടെ മൂലം) കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മതി. അതായത് $x=\frac{2}{2}=1$ എന്നും $y=\frac{6}{2}=3$ എന്നും മൂലങ്ങൾ $8x^2+1=y^2$ എന്നതിനു കണ്ടെത്താനാകും.

അതുപോലെ $8x^2+9=y^2$ എന്നതിന് $\sqrt{9}=3$ കൊണ്ട് $8x^2+1=y^2$ എന്നതിന്റെ മൂലങ്ങളെ യഥാക്രമം ഗുണിക്കുക. ഫലം $x=1\times3=3$, $y=3\times3=9$

കരണസൂത്രം 37

ഇഷ്ട വർഗ്ഗ പ്രകൃത്യോർ യദ് വിവരം തേന വാ ഭജേത്
ദ്വിഘ്നം ഇഷ്ടം കനിഷ്ടം തൽപദം സ്യാൽ ഏക സംയുതൗ
തതോ ജ്യേഷ്ഠ മിഹാനന്ത്യംഭാവനാ തത് തഥേഷ്ടത:

അർത്ഥം

ഇഷ്ടവർഗ്ഗപ്രകൃത്യോർ വിവരം = ഇഷ്ടസംഖ്യാവർഗ്ഗവും പ്രകൃതിയുമായുള്ള വ്യത്യാസം, തേന വാ ഭജേത് = അതു കൊണ്ടു ഹരിക്കുക, ദ്വിഘ്നം ഇഷ്ടം = ഇഷ്ടസംഖ്യയെ രണ്ടുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്, കനിഷ്ടം = ഹ്രസ്വമൂലം, ഏക സംയുതം = ഒന്നു കൂട്ടിയത് (ക്ഷേപകം ഒന്ന് ആകുമ്പോൾ), തതോ ജ്യേഷ്ഠമിഹാൻ = അതിൽ നിന്നും ജ്യേഷ്ഠമൂലം

സാരം

സമവാക്യത്തിൽ ക്ഷേപകത്തിന്റെ (b) മൂല്യം 1 ആയാൽ ഒരു ഇഷ്ടസംഖ്യയുടെ രണ്ടിരട്ടിയെ, പ്രകൃതിയിൽ നിന്നും ആ ഇഷ്ട സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം കുറച്ചതുകൊണ്ടു ഹരിച്ചത്, ഹ്രസ്വമൂലം (x) ആകും. അതിൽ നിന്നും ജ്യേഷ്ഠമൂലം കാണാം. അതുപോലെ മറ്റു ഇഷ്ട സംഖ്യകളുപയോഗിച്ച് ഭാവനാ രീതി പ്രകാരം അനേകം മൂലങ്ങൾ കാണാം.

ഉദാഹരണമായി

$8x^2+1=y^2$ എന്നതിൽ ക്ഷേപകം =1 ആകുന്നു.

ഇഷ്ടസംഖ്യ =1 എന്നു സങ്കല്പിച്ചാൽ

$x=\frac{2\times1}{8-1}=\frac{2}{7}$ എന്നുകിട്ടും y യുടെ മൂല്യം ഇതിൽ നിന്നും കാണാം.

$$y^2=8\times\left(\frac{2}{7}\right)^2+1=\frac{32}{49}+1=\frac{81}{49} \quad \text{അതായത്} \quad y=\frac{9}{7}$$

അതുപോലെ ഇഷ്ടസംഖ്യ = 2 എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

$$x=\frac{2\times2}{8-2^2}=1, \quad y=3$$

ഇഷ്ടസംഖ്യ = 3 എന്നു സങ്കല്പിച്ചാൽ $x=\frac{2\times3}{8-9}=-6$ എന്നും y = 17 എന്നും മൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണം 29

കോ വർഗ്ഗോƒഷ്ട ഹത: സൈക:
കൃതി: സ്യാൽ ഗണകോ ച്യതാം
ഏകാദശഗുണ: കോ വാ
വർഗ്ഗ: സൈക: കൃതി: സഖേ

അർത്ഥം

കോ വർഗ്ഗ: = ഏതു വർഗ്ഗസംഖ്യയെ, അഷ്ടഹത: = 8 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, സൈക: = ഒന്നു കൂട്ടിയത്, കൃതിസ്യാൽ = വർഗ്ഗസംഖ്യയാകുന്നു, ഏകാദശഗുണം = 11 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്.

സാരം

ഏതുവർഗ്ഗസംഖ്യയെ 8 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഒന്നു കൂട്ടിയത് വർഗ്ഗസംഖ്യയാകുന്നു. എന്നു ഹേ ഗണക, പറയുക. അതുപോലെ ഏതു വർഗ്ഗസംഖ്യയെ പതിനൊന്നു കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഒന്നു കൂട്ടിയത് വർഗ്ഗസംഖ്യയാകുന്നു എന്നും ഹേ സഖേ പറയുക.

ഇവിടെ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളാണ് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യേണ്ടത്

a) $8x^2+1=y^2$

b) $11x^2+1=y^2$

ഇവയിൽ ആദ്യത്തേതിന്റെ നിർദ്ധാരണം മുമ്പു വിവരിച്ചു കഴിഞ്ഞു. $11x^2+1=y^2$ എന്നതിന്റെ ഉത്തരം പരിശോധിക്കാം.

$11x^2+1=y^2$ ഇഷ്ടസംഖ്യ = 3 എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

$$x=\frac{2\times3}{11-9}=\frac{6}{2}=3, \quad y=10$$ എന്നു കണക്കാക്കാം

ഭാവനാ രീതിയിൽ മറ്റൊരു മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുമ്പോൾ $x=2\times3\times10=60$, $y=11\times9+10^2=199$ എന്നു മൂല്യങ്ങൾ കിട്ടും.

ചക്രവാളം

$ax^2+b=y^2$ എന്ന അനിർധാര്യ ദ്വിഘാതസമവാക്യത്തിൽ പ്രകൃതി a ഒരു അവർഗ്ഗസംഖ്യയായാൽ x, y യുടെ മൂല്യങ്ങൾ പൂർണ്ണ സംഖ്യയായി കാണാനുള്ള പൊതുവായ മാർഗ്ഗമാണ് ചക്രവാളരീതി. ഇത് ബ്രഹ്മഗുപ്തന്റെ 'ഭാവനാ' രീതിയുടെ അനുബന്ധമാണ്. ഭാവനാ സമ്പ്രദായം ഇപ്രകാരം സമാഹരിക്കാം.

$ax^2+b_1=y^2$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ $x=\alpha_1$ എന്നും $y=\beta_1$

എന്നും $ax^2+b_2=y^2$ എന്നതിന് $x=\alpha_2$ എന്നും $y=\beta_2$ എന്നും ഉത്തരങ്ങൾ ഉണ്ടെന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളിലും ഒരേ പ്രകൃതിയും b_1,b_2 എന്ന വ്യത്യസ്ത ക്ഷേപകങ്ങളുമാണ് ഇതിൽ നിന്നും

1) $ax^2+b_1b_2=y^2$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ ഉത്തരം $x=\alpha_1\beta_2\pm\alpha_2\beta_1$ എന്നും $y=a\alpha_1\alpha_2\pm\beta_1\beta_2$ എന്നുമായിരിക്കും

2) $b_1=b_2=b$ ആയാൽ $\alpha_1=\alpha_2;\beta_1=\beta_2$

$ax^2+b^2=y^2$ എന്നതിൽ $x=2\alpha\beta$ എന്നും $y=a\alpha^2+\beta^2$ എന്നുമാകും.

3) $ax^2+1=y^2$ എന്നതിന് $x=\dfrac{\alpha}{b}$ എന്നും $x=\dfrac{\beta}{b}$ എന്നും ഉത്തരങ്ങളാകും.

b=2, അഥവാ 4 എന്നായാൽ അതിന്റെ ഉത്തരങ്ങളിൽ നിന്നും $ax^2+1=y^2$ എന്നതിന് x, y മൂല്യങ്ങൾ കാണാൻ കഴിയും. തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തെ സഹായകസമവാക്യം **(auxiliary equation)** ഉപയോഗിച്ച് ആവർത്തനക്രിയയിലൂടെ ക്ഷേപകത്തിന്റെ മൂല്യം 1,2,4 ഇവയിലേതെങ്കിലും ലഭിക്കുന്നതുവരെ ക്രിയചെയ്യുന്ന സമ്പ്രദായമാണ് ചക്രവാളരീതി. ഭാസ്ക്കരാചാര്യരുടെ കാലത്തിന് 500 വർഷങ്ങൾക്കു ശേഷവും പാശ്ചാത്യപണ്ഡിതന്മാർ ഈ മാർഗ്ഗം കണ്ടെത്തിയിരുന്നില്ല. AD 1657- ൽ ഫെർമറ്റ് (Fermat)എന്ന ശാസ്ത്രജ്ഞൻ ഫെർണിക്കിൾ

(Fernicle) എന്ന ഗണിതജ്ഞനോട് $61x^2+1=y^2$ എന്ന സമവാക്യം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാൻ ആവശ്യപ്പെടുകയുണ്ടായി. 1732-ൽ ഓയിലർ (Euler) എന്ന ശാസ്ത്രജ്ഞൻ അതിന് ഉത്തരം കണ്ടെ ത്തിയതായി അവകാശപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. ഇത്തരം സമവാക്യത്തെ **Diophantus, Pell** എന്നി ശാസ്ത്രജ്ഞന്മാരുടെ നാമധേയവുമായി പാശ്ചാത്യ പണ്ഡിതന്മാർ ബന്ധപ്പെടുത്തി. ബ്രഹ്മഗുപ്തനും ഭാസ്ക്കരനും ലഭിക്കേണ്ടതായിരുന്നു ആ ബഹുമതി. $61x^2+1=y^2$ എന്ന സമവാക്യം ഭാസ്ക്കരാചാര്യൻ **AD 1150-ൽ** തന്നെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്തിരുന്നു.

കരണസൂത്രം 38

ഹ്യസ്വ ജ്യേഷ്ഠ പദ ക്ഷേപാൻ ഭാജ്യ പ്രക്ഷേപ ഭാജകാൻ കൃത്വാ കൽപ്യോ ഗുണഃ തത്ര തഥാ പ്രകൃതി തൽ ച്യുതേ ഗുണ വർഗ്ഗേ പ്രകൃത്യോനേ/ഥവാ/ല്പം ശേഷകം യഥാ തൽതു ക്ഷേപ ഹൃതം ക്ഷേപോ വ്യസ്തഃ പ്രകൃതി തൽ ച്യുതേ ഗുണലബ്ധിഃ പദം ഹ്യസ്വം തതോ ജ്യേഷ്ഠമതോ/സകൃത് ത്യക്ത്വാ പൂർവ്വപദ ക്ഷേപാൻ ചക്രവാളം ഇദം ജഗുഃ ചതുർ ദ്വേക യുതാ ഏവം അഭിന്നേ ഭവതഃ പദേ ചതുർ ദ്വിക്ഷേപ മൂലാഭ്യാം രൂപ ക്ഷേപാർഥ ഭാവനാ

അർത്ഥം

ഹ്യസ്വ ജ്യേഷ്ഠപദക്ഷേപാൻ = ഹ്യസ്വജ്യേഷ്ഠമൂലങ്ങൾ ക്ഷേപകം എന്നിവയിൽ നിന്നും, ഭാജ്യ പ്രക്ഷേപഭാജകാൻ കൃത്വാ = ഭാജ്യം, ക്ഷേപകം, ഭാജകം എന്നിവകൾ ഉണ്ടാക്കി; കല്പ്യാ ഗുണഃ = ഗുണകം സങ്കല്പിച്ച് പ്രകൃതി തൽ ച്യുതേ ഗുണവർഗ്ഗം = പ്രകൃതിയിൽ നിന്നും ഗുണവർഗ്ഗം കുറച്ച്, പ്രകൃത്യോനേ അഥവാ അല്പം ശേഷകം = പ്രകൃതിയിൽ നിന്നു കുറച്ച ശിഷ്ടം ചെറുതായത്, ക്ഷേപോവ്യസ്തഃ = ക്ഷേപം വിപരീത ചിഹ്നമായിരിക്കും. തൽതു ക്ഷേപഹൃതം = അതിനെ ക്ഷേപകം കൊണ്ടു ഹരിച്ചത്, തതോ ജ്യേഷ്ഠമതി = അതിൽ നിന്നും ജ്യേഷ്ഠ പദത്തിന്റെ മൂല്യം, ചതുർദ്വയേകം = 4, 2, 1, അഭിന്നം = പൂർണ്ണസംഖ്യ, രൂപക്ഷേപം = ക്ഷേപകം ഒന്ന് ആയത്.

സാരം

നിർദ്ദിഷ്ട കുട്ടകത്തിന് അനുയോജ്യമായി x, y, h (ഹ്യസ്വ ജ്യേഷ്ഠ പദങ്ങൾ ക്ഷേപകം) എന്നിവയുടെ മൂല്യം സങ്കല്പിക്കുക.

അവ യഥാക്രമം ഭാജ്യ, ക്ഷേപക, ഭാജകങ്ങളാക്കി കുട്ടകം ഉണ്ടാക്കുക. ഇതിൽ നിന്നും ഗുണലബ്ധികൾ കാണുക. തന്നിരിക്കുന്ന പ്രകൃതിയിൽ നിന്നും ഗുണകത്തിന്റെ വർഗ്ഗം കുറയ്ക്കുക. അഥവാ ഗുണക വർഗ്ഗത്തിൽ നിന്നും പ്രകൃതി കുറയ്ക്കുക. ഈ വ്യത്യാസം ഏറ്റവും കുറവായിരിക്കണം. അതിനെ (വ്യത്യാസത്തെ) ക്ഷേപകം. കൊണ്ടു ഹരിച്ച് ക്ഷേപകത്തിന്റെ പുതിയ മൂല്യം കാണുക. പ്രകൃതിയിൽ നിന്നും ഗുണവർഗ്ഗം കുറച്ചതാണെങ്കിൽ പുതിയ ക്ഷേപകത്തിന്റെ ചിഹ്നം വിപരീതമായിരിക്കും (മുമ്പത്തേതിൽ നിന്നും) കുട്ടകത്തിൽ നിന്നും ലഭിച്ച ഹരണഫലം പുതിയ ഹ്രസ്വ പദമായിരിക്കും. പുതിയ ഹ്രസ്വ പദവും ക്ഷേപകവും ഉപയോഗിച്ച് ജ്യേഷ്ഠ പദം കാണുക.

മുൻപത്തെ മൂല്യങ്ങൾ ഉപേക്ഷിച്ച് പുതിയ ഹ്രസ്വ ജ്യേഷ്ഠ പദവും ക്ഷേപകവും പടിപടിയായി നിർണ്ണയിക്കുന്ന രീതി ചക്രവാളം എന്നു പറയുന്നു.

ക്ഷേപകം 4, 2, 1 എന്നിവയിലേതെങ്കിലും ഒന്ന് ആകുമ്പോൾ x, y എന്നിവയ്ക്ക് പൂർണ്ണസംഖ്യാമൂല്യങ്ങൾ കണക്കാക്കാം. 4,2 എന്നീ മൂല്യങ്ങൾ ക്ഷേപകത്തിനു ലഭിച്ചാൽ ഭാവനാരീതിയോ മറ്റു മാർഗ്ഗമോ ഉപയോഗിച്ച് ക്ഷേപകം 1 ആകുമ്പോഴുള്ള x, y മൂല്യങ്ങൾ കാണാം

$ax^2+1=y^2$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ ആദ്യമായി

x, y എന്നിവയ്ക്ക് ഏകദേശ മൂല്യം സങ്കല്പിക്കുക. അതായത്

$x_0=\alpha_0, y_0=\beta_0$ ($\alpha_0\beta_0$ എന്നിവ പൂർണ്ണസംഖ്യകളായിരിക്കണം.) ഇതിൽ നിന്നും $a\alpha_0{}^2-\beta_0{}^2$ $a\alpha_0{}^2-\beta_0{}^2=h_0$ എന്ന ക്ഷേപകം കണക്കാക്കാം.

ഇവിടെ h_0 പൂർണ്ണസംഖ്യയായിരിക്കും. ഇതാണ് പുതിയ ക്ഷേപകം

$\frac{a-m_o{}^2}{h_o}$ എന്നത് പൂർണ്ണസംഖ്യ ലഭിക്കുന്ന വിധം m_0 - ന്റെ മൂല്യം സങ്കല്പിക്കുക. ഇതിൽ നിന്നും $\frac{a-m_o{}^2}{h_o}=h_1$ എന്ന അടുത്ത മൂല്യം (ക്ഷേപകത്തിന്റെ) കാണുക. $a-m_0{}^2$ കുറഞ്ഞ സംഖ്യയായിരിക്കണം.

x_1 ന്റെ പുതിയ മൂല്യം $\frac{m_0x_0+y_0}{h_0}$ എന്നും

y_1 ന്റെ പുതിയ മൂല്യം $\frac{ax_0+m_0y_0}{h_0}$ എന്നും കണക്കാക്കണം.

ഇവിടെ x_1, y_1, h_1 എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ കണക്കാക്കിയിട്ടുണ്ട്. h_1 ന്റെ മൂല്യം 4, 2, 1 ഇതിലേതെങ്കിലും ലഭിച്ചാൽ തുടർന്നു ക്രിയ ചെയ്യേണ്ടതില്ല. അല്ലാത്തപക്ഷം ഇതേ പ്രക്രിയ തുടരുക.

അടുത്ത ഘട്ടത്തിൽ $\frac{a-m_1^2}{h_1}$ പൂർണ്ണസംഖ്യ വരുന്നവിധം m_1 ന്റെ മൂല്യം കാണുക $\frac{a-m_1^2}{h_1}=h_2$ എന്നു കിട്ടുന്നു.

അതോടൊപ്പം $x_2=\frac{m_1x_1+y_1}{h_1}$ $y_2=\frac{ax_1+m_1y_1}{h_1}$ എന്നും കണക്കാക്കുക

ഈ ഘട്ടത്തിൽ x_2, y_2, h_2 എന്നിവ ലഭിച്ചു. ഈ ക്രിയ തുടർന്നു. h ന്റെ മൂല്യം 4, 2, 1 എന്നിവയിലേതെങ്കിലും ഒന്നു ലഭിക്കുന്നതു വരെയും തുടരണം. ഓരോ ഘട്ടത്തിലും h ന്റെ ചിഹ്നം (വിപരീതമായി) മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കും.

$ax_n^2-y_n^2=(-1)^nh_n$ എന്നായിരിക്കും

$ax^2+1=y^2$ എന്നതിന്റെ മൂല്യം ഭാവനാരീതിയിൽ കണക്കാക്കാം. ഉദാഹരണമായി $19x^2+1=y^2$ എന്ന സമവാക്യമെടുക്കാം $x_0=1$ എന്നും $y_0=4$ എന്നും സങ്കല്പിച്ചാൽ

$19x1^2-4^2=3$ അതായത് $h_0=3$ എന്നാകും

$\frac{19-m_0^2}{3}$ പൂർണ്ണസംഖ്യയാകാൻ $m_0=2$ എന്നെടുക്കുക

അതായത് $\frac{19-4}{3}=5=h_1$, $x_1=\frac{2\times1+4}{3}=2$,

$$y=\frac{19\times1+2\times4}{3}=9$$

$x = 1,\ y = 4,\ h = -3$ എന്നതിൽ നിന്നും
$x = 2,\ y = 9,\ h = +5$ എന്നായി മാറി

അടുത്തപടിയിൽ

$\frac{19-m_1^{2}}{h_1}$ പൂർണ്ണസംഖ്യയാകാൻ $m_1=3$ എന്നെടുക്കുക.

$$h_2=\frac{19-9}{5}=2 \quad x_2=\frac{3\times2+9}{5}=3, \quad y_2=\frac{19\times2+3\times9}{5}=13$$

ഇവിടെ $x_2=3,\quad y_2=13,\quad h_2=2$

$$h_2=(-1)^2\times2=2$$

അതായത് $19x^2 - 2 = y^2$ എന്നതിന് $x = 3,\ y = 13$ എന്ന മൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു.

ഭാവനാസിദ്ധാന്ത പ്രകാരം

$19x^2+4=y^2$ എന്നതിന് $x=2\times3\times13=78$,
$y=19\times9+13^2=340$ എന്നു മൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു.

അതിൽ നിന്നും $19x^2-1=y^2$ എന്നതിന്റെ $x,\ y$ മൂല്യങ്ങൾ $x=\frac{78}{\sqrt{4}}=39,\quad y=\frac{340}{\sqrt{4}}=170$ എന്നു ലഭിക്കുന്നു.

ഇവിടെ x, y, h എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ നിർണ്ണയിക്കുന്നതിനു സ്വീകരിച്ച സമവാക്യങ്ങൾക്ക് അല്പം വിശദീകരണം ആവശ്യമാണ്.

$ax^2 - y^2 = h$ എന്ന ഒരു സമവാക്യത്തിൽ x, y എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ സങ്കല്പിച്ച് h എന്നതിന്റെ മൂല്യം കണക്കാക്കുകയാണല്ലോ ചെയ്തത്.

സമവാക്യത്തിന്റെ ഇരുവശവും (a-m²) എന്നതുകൊണ്ട് ഗുണിച്ച് h² കൊണ്ടു ഹരിക്കുക.

$$\frac{(a-m^2)(ax^2-y^2)}{h^2}=\frac{a-m^2}{h}$$

ഇവിടെ $\frac{a-m^2}{h}$ പൂർണ്ണസംഖ്യയാകുന്ന വിധമാണ് m ന്റെ മൂല്യം സ്വീകരിക്കുന്നത് അതേസമയം $a-m^2$ ന്റെ മൂല്യം ഏറ്റവും കുറഞ്ഞിരിക്കാൻ ശ്രദ്ധിക്കുകയും വേണം.

സമവാക്യത്തിന്റെ ഇടതുവശം വികസിപ്പിച്ച് എഴുതുമ്പോൾ

$$\frac{a(mx+y)^2}{h}-\frac{(ax+my)^2}{h}=\frac{a-m^2}{h}$$

x_1 ന്റെ പുതിയ മൂല്യം $\frac{(mx_0+y_0)}{h_0}$ എന്നും y_1 ന്റെ മൂല്യം $\frac{(ax_0+my_0)}{h_0}$ എന്നും പൂർണ്ണസംഖ്യാ രൂപത്തിൽ ലഭിക്കുന്നു.

തൊട്ടുമുമ്പു ലഭിച്ച x, y, h എന്നിവയും m എന്ന ഘടകവും ഉപയോഗിച്ച് അടുത്ത ഘട്ടത്തിലെ x, y എന്നിവ കാണണം. m ന്റെ പുതിയ മൂല്യത്തിൽ നിന്നും അടുത്ത ഘട്ടത്തിലെ h ന്റെ മൂല്യം കണക്കാക്കണം. ഈ പ്രക്രിയ h എന്നതിന് 4,2,1 എന്നിവയിലേതെങ്കിലും ലഭിക്കുന്നതു വരെ തുടരുക. പിന്നീട് ഭാവനാ രീതിയിൽ മൂല്യം കാണാൻ സാധിക്കും.

ഉദാഹരണം 30

കാ സപ്തഷഷ്ടി ഗുണിതാ കൃതിഃ ഏകയുക്താ
കാ ചൈകഷഷ്ടി നിഹതാ ച സഖേ സരൂപാ
സ്യാൽ മൂലദാ യദി കൃതി പ്രകൃതിർ നിതാന്തം
ത്വച്ചേതസി പ്രവദ താത തതാലതാവത്

അർത്ഥം

സപ്തഷഷ്ടി = 67, ഏകയുക്താ = ഒന്നുകൂട്ടി, ഏകഷഷ്ടി = 61, നിഹതാ = ഗുണിച്ച്, സരൂപാ = ഒന്നുകൂട്ടി, മൂലദാ = വർഗ്ഗമൂലം തരുന്നത്, പ്രവദ = പറയുക, ത്വൽ ചേതസി = അങ്ങയുടെ മനസ്സിൽ

സാരം

ഏതു സംഖ്യാവർഗ്ഗത്തെ 67 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഒന്നുകൂട്ടിയതും 61 കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് ഒന്നു കൂട്ടിയതും, വർഗ്ഗമൂലം തരുമോ ആ സംഖ്യകൾ ഏവ എന്ന് അങ്ങേക്ക് അറിയുമെങ്കിൽ ഹേ, സഖേ പറയുക.

ഇവിടെ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളാണ് തന്നിരിക്കുന്നത്.

a) $67x^2+1=y^2$

b) $61x^2+1=y^2$

ഇവ ഓരോന്നായി പരിഗണിക്കാം

a) $67x^2+1=y^2$

തുടക്കത്തിൽ x, y എന്നിവക്ക് സൗകര്യപ്രദമായ മൂല്യങ്ങൾ സങ്കല്പിക്കാം

$x_0 = 1$, $y_0 = 8$ എന്നുള്ള മൂല്യങ്ങളിൽ നിന്നും

$67x_0^2 - y_0^2 = 67 \times 1^2 - 8^2 = 3$ അതായത് $h_0 = 3$

Step1: $\frac{m_0 x_0 + y_0}{h_0} = \frac{m_0 \times 1 + 8}{3}$ ഒരു പൂർണ്ണസംഖ്യയാകാൻ

$m_0 = 1,4,7,10$

എന്നിങ്ങനെയുള്ളവയിൽ $67-m_0^2$ എന്നതിനു ചുരുങ്ങിയ മൂല്യമാകാൻ $m_0=7$ എന്നെടുക്കണം. അതായത്

$$\frac{67-7^2}{3} = \frac{67-49}{3} = \frac{18}{3} = 6 = h_1$$

$$x_1 = \frac{m_0 x_0 + y_0}{h_0} = \frac{7\times1+8}{3} = 5$$

$$y_1 = \frac{ax_0 + m_0 y_0}{h_0} = \frac{67 \times 1 + 7 \times 8}{3} = 41$$

അതായത് $x_1 = 5$, $y_1 = 41$, $h_1 = 6$

Step2: $\frac{m_1 x_1 + y_1}{h_1} = \frac{m_1 \times 5 + 41}{6}$ പൂർണ്ണസംഖ്യയാകാൻ $m_1 =$ 5, 11 എന്നിവയിൽ $67 - m_1^2$ ചുരുങ്ങിയ മൂല്യം ലഭിക്കാൻ $m_1 = 5$ എന്നു സങ്കല്പിക്കുക

$$m_1 = 5 \quad h_2 = \frac{67 - 25}{6} = 7$$ അതായത്

$$x_2 = \frac{m_1 x_1 + y}{h_1} = \frac{5 \times 5 + 41}{6} = 11, \quad y_2 = \frac{ax_1 + m_1 y_1}{h_1} = \frac{67 \times 5 + 5 \times 41}{6} = 90$$

Step3: $x_2 = 11, y_2 = 90, h_2 = 7 \quad \frac{m_1 \times 11 + 90}{7} = h_3$

h_3 പൂർണ്ണസംഖ്യയാകാൻ $m_2 = 2$, 9 എന്നിങ്ങനെ മൂല്യങ്ങളാകാം. $67 - m_2^2$ ചുരുങ്ങിയ ധനസംഖ്യയാകണമെങ്കിൽ $m_2 = 2$ എന്ന മൂല്യം സ്വീകരിക്കണം.

$$h_3 = \frac{67 - 4}{7} = 9$$

$$x_3 = \frac{m_2 x_2 + y_2}{h_2} = \frac{2 \times 11 + 90}{7} = 16$$

$$y_3 = \frac{ax_2 + m_2 y_2}{h_2} = \frac{67 \times 11 + 2 \times 90}{7} = 131 \quad x_3 = 16, \quad y_3 = 131, \quad h_3 = 9$$

Step4: $\frac{m_3 \times 16 + 131}{9}$ പൂർണ്ണസംഖ്യയാകാൻ $m_3 = 7$ എന്നായിരിക്കണം. $h_4 = \frac{67 - 7^2}{9} = 2$

$$x_4 = \frac{m_3x_3 + y_3}{h_3} = \frac{7\times16+131}{9} = 27$$

$$y_4 = \frac{ax_3 + m_3y_3}{h_3} = \frac{67\times16+7\times131}{9} = 221$$

h ന്റെ മൂല്യം 2 എന്നാകയാൽ തുടർന്നു ക്രിയ ചെയ്യേണ്ടതില്ല.

$$h_4 + (-1)^2{}_4 = +2$$

അതായത് $67x^2 - y^2 = 2$ അഥവാ $67x^2 - 2 = y^2$ എന്നതിന്റെ x, y മൂല്യങ്ങൾ $x = 27$, y = 221, h = -2 ഇതിൽ നിന്നും ഭാവനാ രീതി ഉപയോഗിച്ച് $67x^2 + 4 = y^2$

എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ x, y മൂല്യങ്ങൾ കാണാം

$$x = 2\times27\times221 = 11934$$

$$y = 67\times27^2\times221^2 = 97684$$

ഇവിടെ ക്ഷേപകം 4 ആകയാൽ $67x^2 + 1 = y^2$ എന്നതിന്റെ x, y മൂല്യങ്ങൾ കാണാൻ $\sqrt{4} = 2$ കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മതി

അതായത് $x = \frac{11934}{2} = 5967$ $\quad y = \frac{97684}{2} = 48842$

ഇവയാണ് $67x^2 + 1 = y^2$ എന്നതിനു യോജ്യമായ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ പൂർണ്ണ സംഖ്യാ മൂല്യങ്ങൾ.

അടുത്ത സമവാക്യം $61x^2 + 1 = y^2$ എന്നതാണ്

പ്രാരംഭമൂല്യങ്ങൾ $x_0 = 1$, $y_0 = 7$, $h_0 = 61\times1^2 - 7^2 = 12$

Step1: $\frac{61 - m_0{}^2}{h_0} = \frac{61 - m_0{}^2}{12}$, $m_0 = 5$ എന്ന മൂല്യമാണ് യോജിച്ചത്

$$h_1 = \frac{61-25}{12} = 3$$

$$x_1 = \frac{m_0x_0 + y_0}{h_0} = \frac{5\times1+7}{12} = 1 \quad y_1 = \frac{ax_0 + m_0y_0}{h_0} = \frac{61\times1+5\times7}{12} = 8$$

Step2: $\frac{m_1x_1 + y_1}{h_1} = \frac{m_1+8}{3}$ ഒരു പൂർണ്ണസംഖ്യയായാൽ $m_1 = 7$ എന്നതാണ് യോജിക്കുന്നത്

$$h_2 = \frac{61-7^2}{3} = 4 \qquad x_2 = \frac{m_1x_1+y_1}{h_1} = \frac{7\times1+8}{3} = 5$$

$$y_2 = \frac{ax_1 + m_1y_1}{h_1} = \frac{61\times1+7\times8}{3} = 39$$

ഇവിടെ $h_2 = 4$ എന്നു ലഭിച്ചു. അതിന്റെ പിഹ്നം $(-1)^2 =+$ ധനസംഖ്യയാണ്.

$61x^2 - y^2 = +4$ എന്നുള്ള സമവാക്യപ്രകാരം

$61x^2 - 4 = y^2$ എന്നതിന് $x = 5$, $y = 39$ എന്നു ലഭിക്കുന്നു.

ഇതിൽ നിന്നും $61x^2 - 1 = y^2$ എന്നതിന്റെ x, y മൂല്യങ്ങൾ $x = \frac{5}{2}$, $y = \frac{39}{2}$ എന്നാകും

$61x^2 + 1 = y^2$ എന്നതിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ ഭാവനാരീതിപ്രകാരം

$x_1 = 2\times\frac{5}{2}\times\frac{39}{2} = \frac{195}{2}$; $y_1 = 61\times\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{39}{2}\right)^2 = \frac{1523}{2}$ എന്നിവയാണ്

ഇവയും ഭിന്ന സംഖ്യകളാകയാൽ വീണ്ടും ഭാവനാ രീതിയിൽ മറ്റു മൂല്യങ്ങൾ കാണണം

അടുത്ത x, y മൂല്യങ്ങൾ ഇപ്രകാരമാണ്

$$x_2 = 2\times\frac{195}{2}\times\frac{1523}{2} = \frac{296985}{2}$$

$$y_2 = 61\times\left(\frac{195}{2}\right)^2 + \left(\frac{1523}{2}\right)^2 = \frac{2319527}{2}$$

ഇവയും ഭിന്ന സംഖ്യകളാണ്. ഭാവനാരീതി തുടർന്നും ഉപയോഗിക്കുക.

$$x_3=x_1y_2+x_2y_1=\frac{195}{2}\times\frac{2319527}{2}+\frac{246985}{2}\times\frac{1523}{2} \quad =226153980$$

$$y_3= 61x_1x_2+y_1y_2$$

$$61\times\frac{195}{2}\times\frac{296985}{2}+\frac{1523}{2}\times\frac{2319527}{2} \quad =1766319049$$

അതായത് $61\,x^2 + 1 = y^2$ എന്നതിന്റെ ഏറ്റവും കുറവായ പൂർണ്ണസംഖ്യാമൂല്യങ്ങൾ ഇവയാണ്

x = 226153980 y = 1766319049

കരണസൂത്രം 39

രൂപ ശുദ്ധൌ ഖിലോദ്ദിഷ്ടം
വർഗ്ഗയോഗോ ഗുണോ നചേൽ
അഖിലേ കൃതിമൂലാഭ്യാം
ദ്വിധാ രൂപം വിഭാജിതം
ദ്വിധാ ഹ്രസ്വ പദം ജ്യേഷ്ഠം
തതോ രൂപ വിശോധനം
പൂർവ്വവദ് വാ പ്രസാദ്ധ്യേതേ
പദേ രൂപ വിശോധനേ

അർത്ഥം

രൂപശുദ്ധൌ = ക്ഷേപകം -1 ആയാൽ, ഖില ഉദ്ദിഷ്ടം = ഉദ്ദേശിച്ചത് (നിർദ്ധാരണം) അസാധ്യമാണ്, ഗുണം = ഗുണകാരം (പ്രകൃതി), വർഗ്ഗയോഗം = വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക, ദ്വിധാ = രണ്ടു ഭാഗമായി, രൂപം വിഭാജിതം = ഒന്നിനെ ഹരിക്കുക, ദ്വിധാ ഹ്രസ്വപദം = രണ്ടു വിധമുള്ള ഹ്രസ്വപദം (x) തതോ = അവയിൽനിന്ന്, രൂപവിശോധനം = മൂല്യനിർണ്ണയം, പൂർവ്വവദ് = മുമ്പത്തെപ്പോലെ, പദേ = മൂല്യങ്ങൾ (x, y) പ്രസാദ്ധ്യം = സാധ്യമായത്.

സാരം

സമവാക്യത്തിലെ ക്ഷേപകം-1 ആയാൽ പ്രകൃതി (a) രണ്ടു വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക അല്ലെങ്കിൽ നിർദ്ധാരണം അസാധ്യമാണ്.

പ്രകൃതിയുടെ ഘടക വർഗ്ഗങ്ങളുടെ വർഗ്ഗമൂലം കൊണ്ട് ഒന്നിനെ ഹരിച്ചാൽ ഹ്രസ്വമൂലത്തിന്റെ രണ്ടുവിധ മൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കും. അവയിൽനിന്നു ജ്യേഷ്ഠമൂലങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാൻ സാധിക്കും. അഥവാ ആ സമവാക്യത്തെ മുമ്പത്തേപ്പോലെ (ചക്രവാളരീതിയിൽ) നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാൻ സാധിക്കും.

ഉദാഹരണമായി $61x^2 - 1 = y^2$ എന്നതിലെ ക്ഷേപകം -1 എന്ന താണ് ഇതിലെ പ്രകൃതി (61)=36+25 എന്ന വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയായതിനാൽ $61x^2 + 1 = y^2$ എന്നതിന് x, y മൂല്യങ്ങൾ ഭിന്നസംഖ്യകളായി കാണാൻ കഴിയും.

61 ന്റെ ഘടകവർഗ്ഗങ്ങളുടെ വർഗ്ഗമൂലം 6,5 എന്നിവയാണ്. അതിനാൽ x ന്റെ മൂല്യങ്ങൾ $\frac{1}{6}, \frac{1}{5}$ എന്നിവ ലഭിക്കുന്നു. ഇവ പൂർണ്ണസംഖ്യകളല്ലെന്നു മാത്രം

അതനുസരിച്ച് y യുടെ മൂല്യങ്ങൾ $61 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 - 1$ ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം $\frac{5}{6}$ അഥവാ $61 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 - 1 = \left(\frac{6}{5}\right)^2$

അതായത് $61x^2 - 1 = y^2$ എന്നതിന്റെ x, y മൂല്യങ്ങൾ $\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$ അഥവാ $\left(\frac{1}{5}, \frac{6}{5}\right)$ എന്നിവയായിരിക്കും.

എന്നാൽ 67 രണ്ടു വർഗ്ഗസംഖ്യകയുടെ തുക അല്ലാത്തതിനാൽ $67x^2 - 1 = y^2$ എന്നതിന്റെ x, y മൂല്യങ്ങൾ കാണാൻ പ്രയാസമാണ്

ഉദാഹരണം 31

ത്രയോദശഗുണോ വർഗ്ഗോ നിരേകഃ കഃ കൃതിർഭവേത്
കോ വാ*f*ഷ്ട ഗുണിതോ വർഗ്ഗോ നിരേകോ മൂലദാ വദ

അർത്ഥം

ത്രയോദശം = 13, നിരേകം = ഒന്നുകുറച്ചത്, അഷ്ടഗുണിതം = 8 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്.

സാരം

ഏതു വർഗ്ഗത്തെ 13 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഒന്നു കുറച്ചത് ഒരു വർഗ്ഗ സംഖ്യയാകുന്നു? അതുപോലെ ഏതു വർഗ്ഗ സംഖ്യയെ 8 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഒന്നു കുറച്ചതു വർഗ്ഗമൂലം ഉളവാക്കുന്നു എന്നും പറയുക.

ഇവിടെ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങൾ തന്നിരിക്കുന്നു.

a) $13x^2 - 1 = y^2$

b) $8x^2 - 1 = y^2$

ഇവയിലെ പ്രകൃതികൾ (13, 8 എന്നിവ) വർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ തുകയാകുന്നു. 13=9+4, 8 = 4 + 4

അതിനാൽ $13x^2 - 1 = y^2$ എന്നതിന് $x = \frac{1}{3}$ അഥവാ $x = \frac{1}{2}$ എന്നും $8x^2 - 1 = y^2$

എന്നതിന് $x = \frac{1}{2}$ എന്നും മൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു. അവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ ഇപ്രകാരം കണക്കാക്കാം.

$$13x^2-1=y^2, (x,y)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$8x^2-1=y^2, (x,y)=\left(\frac{1}{2},1\right)$$

ഭാവനാ രീതിയിൽ ഇവയുടെ പൂർണ്ണസംഖ്യാ മൂല്യങ്ങൾ കാണാം

$13x^2 - 1 = y^2$ എന്നതിന് $x=\frac{1}{2}, y=\frac{3}{2}$ എന്നിവയിൽ നിന്നും

$13x^2 + 1 = y^2$ എന്നതിന്റെ $x=2\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$,

$y=13\times\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{11}{2}$ എന്നും കണക്കാക്കാവുന്നതാണ്. അതായത്

$$13x^2-1=y^2 \rightarrow x_1=\frac{1}{2}, \quad y_1=\frac{3}{2}, \quad 13x^2+1=y^2 \rightarrow x_2=\frac{3}{2},$$

$y_2=\frac{11}{2}$ ഇവയിൽ നിന്നും $13x^2-1=y^2$ ന്റെ മൂല്യം വീണ്ടും കാണുക.

$$x_3=x_1y_2+x_2y_1=\frac{1}{2}\times\frac{11}{2}+\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=5$$

$$y_3=13x_1x_2+y_1y_2=13\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\times\frac{11}{2}=18$$

ഇവ ($x=5$, $y=18$) $13x^2-1=y^2$ എന്നതിലെ x, y യുടെ പൂർണ്ണ സംഖ്യാമൂല്യങ്ങളാകുന്നു.

അതുപോലെ $8x^2-1=y^2$ എന്നതിൽ $x_1=\frac{1}{2}, y_1=1$,

$8x^2+1=y^2$ എന്നതിന് $x_2=2\times\frac{1}{2}\times1=1$ $y_2=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times1^2=3$

ഇവയിൽ നിന്നും $8x^2-1=y^2$ എന്നതിന്റെ അടുത്ത മൂല്യങ്ങൾ $x_3=\frac{1}{2}\times3\times1=\frac{5}{2}$ $y_3=8\times\frac{1}{2}\times1+1\times3=7$

$8x^2+1=y^2$ എന്നതിന്റെ അടുത്ത മൂല്യങ്ങൾ $x_4=2\times1\times3=6$, $y_4=8\times1^2+3^2=17$

ഇവയിൽ നിന്നും $8x^2-1=y^2$ എന്നതിന്റെ അടുത്ത മൂല്യങ്ങൾ കാണാം $x_3=\frac{5}{2}$, $y_3=7$, $x_4=6$, $y_4=17$

$$x_5=\frac{5}{2}\times17+7\times6=\frac{167}{2} \qquad y_5=8\times\frac{5}{2}\times6+7\times17=239$$

ഇപ്രകാരം അനേകം മൂല്യങ്ങൾ കാണാനാകും.

ഉദാഹരണം 32

കോ വർഗ്ഗഃ ഷട്ഗുണഃ ത്ര്യാഢ്യോ
ദ്വാദശാഢ്യോഽഥവാ കൃതിഃ

യുതോ വാ പഞ്ചസപ്തത്യാ
ത്രിശത്യാ വാ കൃതിർ ഭവേത്

അർത്ഥം

ഷട്ഗുണഃ = 6 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്, ത്ര്യാഢ്യോ = 3 കൂട്ടിയത്, ദ്വാദശാഢ്യോ = 12 കൂട്ടിയത്, പഞ്ചസപ്തതി = 75, ത്രിശതം = 300.

സാരം

ഏതു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗത്തെ 6 കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് മൂന്നോ അഥവാ പന്ത്രണ്ടോ കൂട്ടിയാൽ ഒരു വർഗ്ഗസംഖ്യയാകുന്നു. അഥവാ അതിനോട് 75, 300 എന്നിവ കൂട്ടിയാലും വർഗ്ഗ സംഖ്യകളാകുന്നു

ഇവിടെ 4 സമവാക്യങ്ങൾ തന്നിരിക്കുന്നു.

$6x^2 + 3 = y^2$

$6x^2_2 + 12 = y^2_2$

$6x^2_3 + 75 = y^2_3$

$6x^2_4 + 300 = y^2_4$

ഇവയിൽ $6x^2 + 3 = y^2_1$ എന്നതിന് $x = 1$, $y = 3$ എന്ന് ഉത്തരം കാണാം. മറ്റു സമവാക്യങ്ങളിലെ ക്ഷേപകങ്ങൾ 3 നെ 4, 25, 100 എന്നീ വർഗ്ഗസംഖ്യകൾ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചവയാണ്. അതിനാൽ ഭാവനാരീതിപ്രകാരം $x = 1$, $y = 3$ എന്നതിനെ 4, 25,100 എന്നിവയുടെ വർഗ്ഗമൂലം കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാം

$6x^2 + 3 = y^2$ $x = 1$ $y = 3$

$6x^2 + 12 = y^2$ $x = 2$ $y = 6$

$8x^2 + 75 = y^2$ $x = 5$ $y = 15$

$6x^2 + 300 = y^2$ $x = 10$ $y = 30$ എന്നിങ്ങനെ ഉത്തരങ്ങൾ

കരണസൂത്രം 40

സ്വ ബുദ്ധയൈവ പദേ ജ്ഞേയേ
ബഹുക്ഷേപ വിശോധനേ
തയോർഭാവനയാ*f*നന്ത്യം
രൂപക്ഷേപ പദോത്ഥയാ

അർത്ഥം

സ്വബുദ്ധയൈവ = സ്വന്തം ബുദ്ധികൊണ്ടു തന്നെ, പദേജ്ഞേയ = മൂലങ്ങൾ കാണുക, ബഹുക്ഷേപ വിശോധനേ = ക്ഷേപകങ്ങൾ വിവിധങ്ങളായവ നിർദ്ധാരണത്തിന്, രൂപക്ഷേപ പദോത്ഥയാ = ക്ഷേപകം ഒന്ന് ആകുമ്പോൾ മൂലങ്ങളിൽ നിന്നും കാണുക.

സാരം

ക്ഷേപകങ്ങൾ വിവിധങ്ങളായാൽ സ്വബുദ്ധി ഉപയോഗിച്ച് ഒരു മൂല്യം കണ്ടെത്തണം. അതിൽനിന്നും ക്ഷേപം ഒന്ന് എന്നായ സമവാക്യത്തിന് അനേകമൂല്യങ്ങൾ ഭാവനാ രീതിയിൽ കാണാൻ സാധിക്കും. അതിനാൽ $ax^2+1=y^2$ എന്നത് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാൻ ആദ്യമായി $ax^2+k=y^2$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ x, y മൂല്യങ്ങൾ സങ്കല്പിക്കുക. അതിൽ നിന്നും ഭാവനാരീതിയിൽ $ax^2+k^2=y^2$ എന്നതിന്റെയും അവയിൽ നിന്ന് $ax^2+1=y^2$ എന്നതിന്റെയും x, y മൂല്യങ്ങൾ കാണാൻ കഴിയും.

കരണസൂത്രം 41

വർഗ്ഗ ച്ഛിന്നേ ഗുണേ ഹ്രസ്വം തൽ പദേന വിഭാജയേത്

അർത്ഥം

വർഗ്ഗച്ഛിന്നേ ഗുണേ = ഗുണകത്തെ (പ്രകൃതി) ഒരു വർഗ്ഗസംഖ്യ കൊണ്ടു ഹരിച്ച്, തൽപദേന = ആ സംഖ്യയുടെ (വർഗ്ഗസംഖ്യ) വർഗ്ഗമൂലം കൊണ്ട്, ഹ്രസ്വം വിഭാജയേത് = ഹ്രസ്വമൂലം ഭാഗിക്കുക.

സാരം

പ്രകൃതിയെ (a) ഒരു വർഗ്ഗസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ച് സമവാക്യം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക. അതിലെ ഹ്രസ്വമൂല(x)ത്തെ (ഹരിക്കാനുപയോഗിച്ച) സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മൂല സമവാക്യത്തിലെ ഹ്രസ്വമൂലം കാണാം (ജ്യേഷ്ഠ മൂലത്തിനു മാറ്റമില്ല)

ഉദാഹരണമായി $8x^2-1=y^2$ എന്നതിൽ 8 നെ 4 കൊണ്ടു (വർഗ്ഗസംഖ്യ) കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ $2x^2-1=y^2$ എന്ന സമവാക്യമാകും. ഇതിന് $x=1$, $y=1$ എന്ന് മൂല്യങ്ങളുണ്ട്. അതിനാൽ $8x^2-1=y^2$ എന്നതിൽ $x=\frac{1}{2}$ $y=1$ എന്ന ഉത്തരങ്ങൾ കാണാം.

ഉദാഹരണം 33

ദ്വാത്രിംശത് ഗുണിതോ വർഗ്ഗഃ കഃ സൈകോ മൂലദോ വദ

അർത്ഥം

ദ്വാത്രിംശത് = 32, സൈകം = ഒന്നു കൂട്ടിയത്,

സാരം

ഏതു വർഗ്ഗസംഖ്യയെ 32 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഒന്നു കൂട്ടിയാൽ വർഗ്ഗമൂലം തരുന്ന സംഖ്യയാകുമെന്നു പറയുക.

അതായത് $32x^2+1 = y^2$ എന്നതിൽ 32 എന്നത് 2×4^2 ആകുന്നു. അതിനാൽ $2x^2+1 = y^2$ എന്ന ലഘൂകൃതസമവാക്യത്തിന്റെ x, y മൂല്യങ്ങൾ കാണുക $x=2$, $y=3$. $32x^2+1 = y^2$ എന്നതിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ $x=\frac{1}{2}, y=3$ എന്നാകും. ഭാവനാരീതിയിൽ ഇതിൽ നിന്നും $x=3$, $y=17$ എന്ന പൂർണ്ണസംഖ്യകൾ ലഭ്യമാണ്.

കരണസൂത്രം 42

ഇഷ്ട ഭക്തോ ദ്വിധാ ക്ഷേപ ഇഷ്ടോനാഢ്യോ ദലീകൃതഃ
ഗുണമൂല ഹൃതശ്ചാfദ്യോ ഹ്രസ്വജ്യേഷ്ഠേ ക്രമാൽ പദേ.

അർത്ഥം

ഇഷ്ട ഭക്ത = ഇഷ്ടസംഖ്യകൊണ്ടു ഭാഗിച്ചത്, ഇഷ്ടോനാഢ്യോ = ഇഷ്ടസംഖ്യകളെ കുറച്ചും കൂട്ടിയും, ദലീകൃത = രണ്ടു കൊണ്ടു ഭാഗിച്ചത്, ഗുണമൂലഹൃതം = പ്രകൃതിയുടെ വർഗ്ഗമൂലം കൊണ്ടു ഹരിച്ചത്.

സാരം

പ്രകൃതി ഒരു വർഗ്ഗസംഖ്യയാണെങ്കിൽ ക്ഷേപകത്തെ ഇഷ്ടമുള്ള ഒരു സംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിക്കുക. ഹരണഫലം രണ്ടിടത്തു വയ്ക്കുക. ഒന്നിൽ നിന്നു ഇഷ്ടസംഖ്യ കുറച്ച് പകുതി കാണുക. മറ്റേതിനോട് ഇഷ്ടസംഖ്യ കൂട്ടി പകുതി കാണുക. ഇവയിൽ ആദ്യഘടകത്തെ പ്രകൃതിയുടെ വർഗ്ഗമൂലം കൊണ്ട് ഹരിച്ചത് ഹ്രസ്വമൂലവും രണ്ടാമത്തേത് ജ്യേഷ്ഠമൂലവുമാകുന്നു.

ക്ഷേപകം $k=k_1\times k_2$ ആയി ഘടകങ്ങളാക്കി k_1 ഇഷ്ടസംഖ്യയായി സങ്കല്പിക്കുക.

$\frac{k_2-k_1}{2}$, $\frac{k_2+k_1}{2}$ എന്നിവ കാണുക.

$x=\frac{k_2-k_1}{2\sqrt{a}}\, y=\frac{k_2+k_1}{2}$ എന്ന മൂലങ്ങൾ ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണം 34

കാ കൃതിർ നവഭിഃ ക്ഷുണ്ണോ ദ്വിപഞ്ചാശത്യുതാ കൃതിഃ
കോവാ ചതുർഗ്ഗുണോ വർഗ്ഗ ത്രയത് ത്രിംശത് യുതാ കൃതിഃ

അർത്ഥം

നവഭിക്ഷുണ്ണോ = 9 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ദ്വിപഞ്ചാശത് = 52, ചതുർഗുണോ = 4 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്, ത്രയത് ത്രിംശത് =33

സാരം

ഏതു വർഗ്ഗസംഖ്യയെ 9 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 52 കൂട്ടിയതു വർഗ്ഗമാകുന്നു. ഏതുവർഗ്ഗത്തെ 4 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 33 കൂട്ടിയത് വർഗ്ഗ മാകുന്നു.

ഇവിടെ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങൾ തന്നിരിക്കുന്നു.

a) $9x^2+52=y^2$

b) $4x^2+33=y^2$

ഇവയിൽ പ്രകൃതികൾ 9, 4 എന്നിവയാണ്. അവ വർഗ്ഗ സംഖ്യകളുമാണ്. ക്ഷേപകങ്ങളെ ഘടകങ്ങളാക്കുമ്പോൾ $52=13\times4$ എന്നും $33=11\times3$ എന്നും ലഭിക്കുന്നു.

a) $9x^2+52=y^2$ എന്നതിൽ ഇഷ്ടസംഖ്യ = 4 എന്നു സങ്കല്പിക്കുക. പ്രകൃതിമൂലം = 3

ജ്യേഷ്ഠമൂലം $=\left[\frac{52}{4}+4\right]\frac{1}{2}=\frac{17}{2}$ ഹ്യസ്വമൂലം $=\left[\frac{52}{4}-4\right]\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{2}$

ഇവിടെ ഇഷ്ടസംഖ്യ 2 എന്നാണ് സ്വീകരിച്ചതെങ്കിൽ $\frac{52}{2}=26$

ജ്യേഷ്ഠമൂലം $=\frac{26+2}{2}=14$ എന്നും (y) ഹ്യസ്വമൂലം $=\frac{26-2}{2\times3}=4$ എന്നും (x) ലഭിക്കും.

b) $4x^2+33=y^2$ എന്നതിൽ പ്രകൃതിയുടെ മൂലം =2 ഇഷ്ടസംഖ്യ =3

ആയാൽ $\frac{33}{3}=11$ ജ്യേഷ്ഠമൂലം $=\frac{11+3}{2}=7$

ഹൃസ്വമൂലം = $\frac{11-3}{2\times2}=2$

ഉദാഹരണം 35

ത്രയോദശ ഗുണോ വർഗ്ഗഃ കഃത്രയോദശ വർജ്ജിതഃ ത്രയോദശയുതോ വാ സ്യാൽ വർഗ്ഗഏവ നിഗദ്യതാം.

അർത്ഥം

ത്രയോദശ ഗുണം = 13 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്, ത്രയോദശ വർജ്ജിത = 13 കുറച്ചത്, ത്രയോദശയുതാ = 13 കൂട്ടിയത്, നിഗദ്യതാം = പറഞ്ഞാലും

സാരം

ഏതു വർഗ്ഗസംഖ്യയെ 13 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 13 കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്താൽ വർഗ്ഗസംഖ്യയാകുമെന്നു പറഞ്ഞാലും

അതായത് $13x^2\pm13=y^2$

ഇവിടെ 13 = 9 + 4 എന്ന വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയാണ്.

അതിനാൽ $13x^2-1=y^2$ എന്നതിന് $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ എന്ന മൂല്യം സ്വീകരിക്കാം.

ഇതിൽ നിന്നും $13x^2+1=y^2$ എന്നതിന് $x=2\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

$y=13\times\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{22}{4}=\frac{11}{2}$ എന്നും ഉത്തരം കാണാം.

$\frac{1}{13}$ എന്നത് $\left(\frac{2}{13}\right)^2+\left(\frac{3}{13}\right)^2$ എന്നീ വർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ യോഗമാണ്

$13x^2+13=y^2$. ആയതിനാൽ $x^2+1=\frac{y^2}{13}$ എന്നും $\frac{1}{13}y^2-1=x^2$

എന്നും രൂപഭേദം വരുത്തുമ്പോൾ $y=\frac{13}{2}$ എന്നും $x=\frac{3}{2}$ എന്നും മൂല്യങ്ങൾ ഉണ്ടാകും.

അതായത്

$$13x^2 - 1 = y^2 \quad x = \frac{1}{2} \quad y = \frac{3}{2}$$

$$13x^2 + 1 = y^2 \; x = \frac{3}{2} \quad y = \frac{11}{2} \text{ or } x = \frac{33}{2}, \; y = \frac{119}{2}$$

$$13x^2 + 13 = y^2 \quad x = \frac{3}{2} \quad y = \frac{13}{2}$$

$$13x^2 - 13 = y^2 \qquad x = \frac{1}{2} \times \frac{13}{2} + \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$$

$$y = 13\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \times \frac{13}{2} = \frac{39}{2}$$

ഭാവനാരീതിയിൽ

$13x^2 + 13 = y^2$ മൂല്യങ്ങൾ (x, y) കാണാം

$$x = \frac{3}{2} \times \frac{13}{2} + \frac{11}{2} \times \frac{3}{2} = 18 \quad y = 13\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{11}{2} \times \frac{13}{2} = 65$$

$13x^2 - 13 = y^2$ എന്നതിന്റെ (x, y) മൂല്യങ്ങൾ

$$x = \frac{33}{2} \times \frac{39}{2} + \frac{119}{2} \times \frac{11}{2} = 649 \quad y = 13\frac{33}{2} \times \frac{11}{2} + \frac{119}{2} \times \frac{39}{2} = 2340$$

ie $x = 649, \; y = 2340$

ഉദാഹരണം 36

ഋണഗൈഃ പഞ്ചഭിഃ ക്ഷുണ്ണഃ കോവർഗ്ഗഃ സൈകവിംശതിഃ വർഗ്ഗഃ സ്യാൽ വദചേൽ വേത്സി ക്ഷയഗ പ്രകൃതൗ വിധിം

അർത്ഥം

ഋണഗൈ പഞ്ചഭി = **-5,** സൈകവിംശതി = **21** കൂട്ടിയത്, ക്ഷയഗപ്രകൃതൗ വിധി = ന്യൂന പ്രകൃതി ഉപയോഗിച്ചുള്ള ഗണിതക്രിയ.

സാരം

ന്യൂനസംഖ്യ പ്രകൃതിയാകുമ്പോഴുള്ള ഗണിതം അറിയുമെങ്കിൽ ഏതു വർഗ്ഗത്തെ ന്യൂനസംഖ്യ അഞ്ചുകൊണ്ട് ഗുണിച്ച് 21 കൂട്ടിയത് ഒരു വർഗ്ഗമാകും എന്നു പറയുക.

$-5x^2 + 21 = y^2$ എന്നതാണ് സമവാക്യം

$21 - 5 = 16$ ആകയാൽ $x = 1, y = 4$ എന്ന് ഇതിനു മൂല്യമാണ്. അതുപോലെ $21 - 5 \times 4 = 1$ എന്നതിൽ നിന്നും $x = 2, y = 1$ എന്നും മറ്റൊരു മൂലയുഗ്മം ലഭിക്കും

x^2, y^2 എന്നിവ ധനസംഖ്യകളാകയാൽ y ക്ക് 1, 4 എന്നീ മൂല്യങ്ങളേ സാധ്യമാകൂ

ഉക്തം ബീജോപയോഗീദം സംക്ഷിപ്തം ഗണിതം കില
അതോ ബീജം പ്രവക്ഷ്യാമി ഗണകാനന്ദകാരകം

അർത്ഥം

ഉക്തം = പറഞ്ഞു, ബീജോപയോഗം = ബീജഗണിത ഉപയോഗം, അതോ = ഇനി, ബീജം = ബീജഗണിതം, പ്രവക്ഷ്യാമി = വിസ്തരിച്ചു പറയാം, ഗണകാനന്ദകാരകം = ഗണിതജ്ഞന്മാർക്ക് ആനന്ദപ്രദമായത്.

സാരം

ഇവിടെ ബീജഗണിതത്തിൽ ഉപയോഗിക്കുന്ന രീതികൾ സംക്ഷിപ്തമായി പറഞ്ഞു. ഇനി ബീജഗണിതത്തിൽ ഗണിതജ്ഞന്മാർക്ക് ആനന്ദപ്രദായമായ ഗണിതം വിവരിക്കാം.

അദ്ധ്യായം 7

ഏകവർണ്ണസമീകരണം

ഒരു അവ്യക്തഘടകം ഉൾപ്പെടുന്ന ചില ബീജഗണിത പ്രശ്നങ്ങൾ ഇവിടെ പ്രതിപാദിക്കുന്നു.

കരണസൂത്രം 43

യാവത് താവത് കല്പ്യം അവ്യക്ത രാശേർ
മാനം തസ്മിൻ കുർവതോദ്ദിഷ്ടമേവ
തുല്യൌ പക്ഷൌ സാധനീയൌ പ്രയത്നാൽ
ത്യക്ത്വാ ക്ഷിപ്ത്വാ വാfപി സംഗുണ്യ ഭക്താ
ഏകാവ്യക്തം ശോധയേത് അന്യപക്ഷാത്
രൂപാണ്യന്യസ്യേതരസ്മാൽ ച പക്ഷാത്
ശേഷാവ്യക്തേ നോദ്ധരേത് രൂപശേഷം
വ്യക്തം മാനം ജായതേ വ്യക്തരാശേഃ
അവ്യക്താനാം ദ്വാദികാനാമപീഹ
യാവത് താവത് ദ്വാദി നിഘ്നം ഹൃതം വാ
യുക്തോനം വാ കൽപയേദ് ആത്മബുദ്ധ്യാ
മാനം ക്വാപി വ്യക്തമേവം വിദിത്വാ

അർത്ഥം

കല്പ്യാ = സങ്കല്പിച്ച്, അവ്യക്തരാശേർ മാനം = അവ്യക്ത സംഖ്യയുടെ മൂല്യം, തുല്യൗ പക്ഷൗ = തുല്യമായ വശങ്ങൾ (ഇരുഭാഗവും തുല്യമായത്), പ്രയത്നാൽ സാധനീയം = ശ്രമത്താൽ സാധിക്കാവുന്നത്, ത്യക്ത്വാ = ഉപേക്ഷിച്ച്, ക്ഷിപ്ത്വാ = കുറച്ച്, സംഗുണ്യ = ഗുണിച്ച് ഭക്താ = ഹരിച്ച് ഏകാവ്യക്തം ശോധയേത് = ഒരു അവ്യക്തഘടകം ശുദ്ധമാക്കുക. രൂപാണി അന്യസ്യ ഇതര സ്മാൽ = സംഖ്യഘടകങ്ങളും മറ്റും മറുവശത്ത്, ശേഷാവ്യക്തം = അവ്യക്തഘടകത്തിന്റെ ഗുണകം, വ്യക്തം മാനം = വ്യക്തമായ മൂല്യം, ദ്വാദികാനാം = രണ്ടെണ്ണമോ അധികമോ, ദ്വാദി നിഘ്നം = രണ്ടുകൊണ്ട് ഗുണിച്ച് ഹൃതം = ഹരിച്ച് യുക്തോനം = കൂട്ടിയും കുറച്ചും, വിദിത്വാ = അറിയുക.

സാരം

അവ്യക്തഘടകത്തിന് ബീജഗണിത സംജ്ഞ സങ്കല്പിക്കുക. പ്രശ്നത്തിൽ നിർദ്ദേശിച്ചപ്രകാരം രണ്ടു തുല്യപക്ഷങ്ങളിലായി ഘടകങ്ങൾ വിന്യസിക്കുക. ആവശ്യാനുസരണം ഘടകങ്ങൾ കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ, ഗുണിക്കുകയോ, ഹരിക്കുകയോ ചെയ്യുക. അവ്യക്ത ഘടകം ഒരുവശത്തും സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ മറുവശത്തും വരുത്തുക. അവ്യക്ത ഘടകത്തിന്റെ ഗുണകം കൊണ്ട് ദൃഢസംഖ്യയെ ഹരിച്ച് അവ്യക്ത സംഖ്യയുടെ മൂല്യം കാണുക.

രണ്ടോ അധികമോ അവ്യക്തഘടകങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ ഒന്നിന് ഒരു മൂല്യം സങ്കല്പിക്കുക. രണ്ടോ മറ്റേതെങ്കിലും സംഖ്യയോ കൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയോ ഹരിക്കുകയോ കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്യുക. ബുദ്ധിപൂർവ്വം മറ്റു ഘടകങ്ങൾക്ക് മൂല്യം കല്പിച്ച് അവ്യക്തമൂല്യം കാണുക.

ഒരു അവ്യക്തഘടകം മാത്രമുള്ള പ്രശ്നങ്ങളിൽ അവ്യക്ത ഘടകം ഒരു വശത്തും ദൃഢസംഖ്യകൾ മറു വശത്തും വരുന്ന വിധം സമവാക്യം എഴുതി ക്രിയ ചെയ്യണം

ഒന്നിലധികം അവ്യക്ത രാശികളുണ്ടെങ്കിൽ അവയിൽ ചിലതിൽ യോജ്യമായ മൂല്യം സങ്കല്പിച്ച് മറ്റുള്ളവയുടെ മൂല്യം കണക്കാക്കണം

ഉദാഹരണം 37

ഏകസ്യ രൂപത്രിശതീ ഷഡശ്വാ
അശ്വാ ദശാന്യസ്യതു തുല്യമൗല്യാഃ
ഋണം തഥാ രൂപശതം ച യസ്യ
തൗ തുല്യ വിത്തൌ ച കിം അശ്വ മൗല്യം

അർത്ഥം

ഏകസ്യ = ഒരാളുടെ, രൂപത്രിശതി = **300** രൂപ, ഷഡശ്വം = **6** കുതിരകൾ, ദശാനി അശ്വം = **10** കുതിരകൾ, തുല്യമൗല്യം = തുല്യമൂലധനം, ഋണം = കടം, രൂപശതം = **100** രൂപ, അശ്വമൗല്യം = കുതിരയുടെ വില

സാരം

ഒരാളുടെ ധനം **300** രൂപയും **6** കുതിരകളുമാണ്. മറ്റൊരാൾക്ക് അതേ വിലകളുള്ള **10** കുതിരകളും **100** രൂപാ കടവുമുണ്ട് അവരുടെ ധനം തുല്യമാണ്. കുതിരകളുടെ വില എത്ര.

ഒരാളുടെ ധനം = **300** രൂപ + **6** കുതിര
രണ്ടാമന്റെ ധനം = **10** കുതിര - **100** രൂപ
അവർ തുല്യ ധനവാന്മാരാണ് അതായത്

300 രൂപ + 6 കുതിര = 10 കുതിര - 100 രൂപ
300+100 രൂപ = (10-6) കുതിര
4 കുതിരകളുടെ മൂല്യം = 400 രൂപ
ഒരു കുതിരയുടെ വില = 100 രൂപ

ഉദാഹരണം 38

യദ് ആദ്യവിത്തസ്യദലം ദ്വിയുക്തം
തത്തുല്യ വിത്തോ യദി വാ ദ്വിതീയഃ
ആദ്യോ ധനേന ത്രിഗുണോƒന്യതാ വാ
പൃഥക് പൃഥക് മേ വദ വാജി മൗല്യം

അർത്ഥം

ആദ്യവിത്തസ്യദലം = ഒന്നാമന്റെ ധനത്തിന്റെ പകുതി, ദ്വിയുക്തം = 2 കൂട്ടിയത്, ത്രിഗുണം = 3 ഇരട്ടി, പൃഥക് = വെവ്വേറെ, വാജിമൗല്യം = കുതിരയുടെ വില.

സാരം

(മുൻ പ്രശ്നത്തിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ളതനുസരിച്ച്) ഒന്നാമന്റെ ധനത്തിന്റെ പകുതിയോടു രണ്ടു കൂട്ടിയാൽ രണ്ടാമന്റെ ധനത്തിനു തുല്യമാകുമ്പോഴും, ഒന്നാമന്റെ ധനം രണ്ടാമന്റെ ധനത്തിന്റെ മൂന്നിരട്ടിയാകുമ്പോഴും ഒരു കുതിരയുടെ വില പ്രത്യേകം പ്രത്യേകം എന്നോടു പറയുക.

a) ഒന്നാമന്റെ ധനം = 300 രൂപാ + 6കുതിര
അതിന്റെ പകുതി +2 = 152 രൂപാ + 3കുതിര
രണ്ടാമന്റെ ധനം = 10 കുതിര - 100 രൂപ
രണ്ടുപേരുടെയും ധനം തുല്യമാണ്.
152 രൂപ +3 കുതിര = 10 കുതിര - 100 രൂപ
252 രൂപാ = 7 കുതിര

ഒരു കുതിരയുടെ വില $\frac{252}{7} = 36$ രൂപ

b) ഒന്നാമന്റെ ധനം = 300 രൂപ + 6 കുതിര
രണ്ടാമന്റെ ധനത്തിന്റെ 3 ഇരട്ടി = 30 കുതിര - 300 രൂപ
അവരുടെ ധനം തുല്യമാണ്.
300 രൂപാ + 6 കുതിര = 30 കുതിര - 300 രൂപാ
24 കുതിരകളുടെ വില = 600 രൂപ

ഒരു കുതിരയുടെ വില = $\frac{600}{24} = 25$ രൂപ

ഉദാഹരണം 39

മാണിക്യാമല നീല മൗക്തിക മിതിഃ
പഞ്ചാഷ്ട സപ്ത ക്രമാൽ
ഏ്കസ്യാന്യതരസ്യ സപ്ത നവ ഷട്
തദ് രത്ന സംഖ്യാ സഖേ
രൂപാണാം നവതിഃ ദ്വിഷഷ്ടിരനയോഃ
തൗ തുല്യവിത്തോ തഥാ
ബീജജ്ഞ പ്രതിരത്നജാനി സുമതേ
മൗല്യാനി ശീഘ്രം വദ

അർത്ഥം

മാണിക്യാമല നീല മൗക്തികം = മാണിക്യം, ഇന്ദ്രനീലം, മുത്ത്, മിതി = എണ്ണം, പഞ്ചാഷ്ട സപ്തക്രമം = 5, 8, 7 എന്ന ക്രമത്തിൽ, ഏകസ്യ = ഒരാളുടെ, ഇതരസ്യ = മറ്റൊരാളുടെ, സപ്ത നവ ഷട് =7, 9, 6, നവതിഃ ദ്വിഷഷ്ടി = 90, 62, പ്രതിരത്നം = ഒരോരത്നത്തിന്റെയും, മൗല്യാനി ജാനി = മൂല്യം അറിയുക.

സാരം

മാണിക്യം, ഇന്ദ്രനീലം, മുത്ത് എന്നിവ ഒരാളുടേത് യഥാക്രമം 5, 8, 7 എന്നിവയും മറ്റൊരാളുടേത് 7, 9, 6 എന്നീ ക്രമത്തിലുമാണ്. അവർക്ക് 90 രൂപയും 62 രൂപയും പണമായും (യഥാക്രമം) സ്വത്തുണ്ട്. അവരുടെ ധനം തുല്യമെങ്കിൽ രത്നമൂല്യം അറിയുമെങ്കിൽ ഹേ സഖേ, ബീജഗണിതജ്ഞ സുമതേ വേഗം പറഞ്ഞാലും.

ഒന്നാമന്റെ ധനം = 5 മാണിക്യം +8 ഇന്ദ്രനീലം+7 മുത്ത്+ 90 രൂപ

രണ്ടാമന്റേത് = 7 മാണിക്യം +9 ഇന്ദ്രനീലം +6 മുത്ത് +62 രൂപ

അവർ തുല്യ ധനവാന്മാരാണ് അതിനാൽ

2 മാണിക്യം +1 ഇന്ദ്രനീലം -1 മുത്ത് = 28 രൂപ (വ്യത്യാസത്തിൽ നിന്ന്)

മുത്തിന്റെ വില 2 രൂപ എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

മാണിക്യത്തിന് ഇന്ദ്രനീലത്തിന്റെ ഇരട്ടി വിലയാണെന്നും സങ്കല്പിച്ചാൽ ഇന്ദ്രനീലത്തിന്റെ വില = 6 രൂപ, മാണിക്യത്തിന്റെ വില = 12 രൂപ

ഇവിടെ മൂല്യങ്ങൾ ഇഷ്ടം പോലെ നിശ്ചയിച്ചിരിക്കുന്നു. മാണിക്യത്തിന്റെ വില = 12 രൂപ, ഇന്ദ്രനീലത്തിന്റെ വില = 6 രൂപ, മുത്തിന്റെ വില = 2 രൂപ

ഇവിടെ ഒരു അവ്യക്തഘടകത്തിന്റെ മൂല്യം സങ്കല്പിച്ച് മറ്റുള്ളവയുടെ മൂല്യം കണക്കാക്കുകയാണ് ചെയ്തത്.

ഉദാഹരണം 40

ഏകോ ബ്രവീതി മമ ദേഹി ശതം ധനേന
ത്വത്തോ ഭവാമി ഹി സഖേ ദ്വിഗുണഃ തതോന്യഃ
ബ്രൂതേ ദശാർപ്പയസി ചേൽ മമ ഷട്ഗുണോ*f*ഹം
ത്വത്തസ്യയോർ വദ ധനേ മമ കിം പ്രമാണേ

അർത്ഥം

ഏകോ ബ്രവീതി = ഒരാൾ പറയുന്നു, മമ ദേഹി = എനിക്കു തരിക, ത്വത്തോ = എങ്കിൽ അതുകൊണ്ട്, ദ്വിഗുണ = രണ്ടിരട്ടി. അന്യഃ ബ്രൂതേ = മറ്റൊരാൾ പറയുന്നു. ദശാർപ്പയസി = 10 തരിക, ഷട്ഗുണോ*f*ഹം = എനിക്ക് 6 ഇരട്ടിയാകും, തയോർധനം = അവരുടെ ധനം, പ്രമാണം കിം = അളവ് എത്ര

സാരം

ഒരുത്തൻ പറയുന്നു. (മറ്റൊരാളോട്) "എനിക്ക് 100 രൂപ തന്നാൽ അതു കൂട്ടി താങ്കളുടെ ഇരട്ടി ധനമുള്ളവനാകും". അപ്പോൾ അന്യൻ പറയുന്നു. താങ്കൾ എനിക്ക് 10 രൂപ തന്നാൽ ഞാൻ താങ്കളേക്കാൾ 6 ഇരട്ടി ധനവാനാകും. അവരുടെ ധനത്തിന്റെ അളവ് എത്രയെന്ന് എന്നോട് പറയുക.

ഒന്നാമന്റെ ആദ്യ ധനം $= x$
രണ്ടാമന്റെ ആദ്യധനം $= y$
ഒന്നാമന്റെ ധനം $+100$ = (രണ്ടാമന്റെ ധനം $-100) \times 2$
$x+100 = (y-100)2 = 2y-200$
$2y - x = 100 + 200 = 300$
ഒന്നാമന്റെ ധനം $-10 = x-10$
രണ്ടാമന്റെ ധനം $= y + 10$
$(x-10)\times 6 = y+10 = 6x - 60$
$6x - y = 10 + 60 = 70$
$y = 6x - 70$
$2y - x = 12x - 140 - x = 300$
$11x = 440$
$x = 40$ രൂപ (ഒന്നാമത്തെയാളുടെ ധനം)
$y = 6x - 70 = 170$ (രണ്ടാമന്റെ ധനം)

ഉദാഹരണം 41

മാണിക്യാഷ്ടകം ഇന്ദ്രനീല ദശകം മുക്താ ഫലാനാംശതം യൽ തേ കർണ്ണ വിഭൂഷണെ സമധനം ക്രീതം ത്വദർധേ മയാ തദ് രത്നത്രയ മൗല്യസംയുതി മിതിഃ ത്ര്യൂനം ശതാർധം പ്രിയേ മൗല്യം ബ്രൂഹി പൃഥക് യദീഹ ഗണിതേ കല്യാസി കല്യാണിനീ

അർത്ഥം

മാണിക്യാഷ്ടകം = 8 മാണിക്യം, ഇന്ദ്രനീലദശകം = 10 ഇന്ദ്രനീലം, മുക്താഫലാനാംശതം = 100 മുത്ത്, കർണ്ണവിഭൂഷണം = കർണ്ണാഭരണം, സമധനം = തുല്യധനം, ക്രീതം = വിലയ്ക്കുവാങ്ങി, ത്വദർധേ = നിനക്കുവേണ്ടി, മയാ = എന്നാൽ, രത്നത്രയ മൗല്യസംയുതി = മൂന്നു രത്നങ്ങളുടെ വിലയുടെ തുക, ത്ര്യൂനം = 3 കുറവ്, ശതാർധം = 50, കല്യാസി = സമർത്ഥനെങ്കിൽ, കല്യാണിനി = മംഗല്യവതി.

സാരം

എട്ടുമാണിക്യം, 10 ഇന്ദ്രനീലം, 100 മുത്ത് എന്നിവ ഓരോന്നും തുല്യ വില കൊടുത്ത് നിന്റെ കർണ്ണാഭരണത്തിനായി ഞാൻ വാങ്ങി. ആ മൂന്നു രത്നങ്ങൾ ഒന്നു വീതം കൂട്ടി ആകെ വില 47 രൂപയാണ്. ഹേ പ്രിയേ, കല്യാണിനി നീ ഗണിതത്തിൽ വിദഗ്ദ്ധയാണെങ്കിൽ ഓരോന്നിന്റെയും വില പ്രത്യേകം പ്രത്യേകം പറയുക.

8 മാണിക്യത്തിന്റെ വില = 10 ഇന്ദ്രനീലത്തിന്റെ വില = 100 മുത്തിന്റെ വില. ഇതിൽ മൂല്യം കുറവ് മുത്തിനാണ്.
ഒരു മുത്തിന്റെ വില = x എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

1 മാണിക്യത്തിന്റെ വില = $\frac{100\,x}{8} = 12\frac{1}{2}x$

1 ഇന്ദ്രനീലത്തിന്റെ വില = $\frac{100\,x}{10} = 10\,x$

മൂന്നു രത്നങ്ങളും ഒന്നു വീതം ചേർത്ത വില

$$\left(12\ \frac{1}{2} + 10\ + 1\right)x = 23\ \frac{1}{2}x,\ 23\frac{1}{2}x = 47 \therefore x = 2$$

മുത്തിന്റെ വില = 2 രൂപ, 1 മാണിക്യത്തിന്റെ വില = 25 രൂപ, 1 ഇന്ദ്രനീലത്തിന്റെ വില = 20 രൂപ.

ഉദാഹരണം 42

പഞ്ചാംശോƒളികുലാൽ കദംബമഗമ
ത്ര്യംശ: ശിലീന്ധ്രം തയോ
വിശ്ലേഷ ത്രിഗുണോ മൃഗാക്ഷി കുടജം
ദോലായമാനേƒപര:
കാന്തേ കേതകി മാലതീ പരിമള
പ്രാപ്തൈകകാല പ്രിയാത്
ദൂതാഹൂത ഇതസ്തതോ ഭ്രമതി ഖേ
ഭൃംഗോƒളി സംഖ്യാം വദ

അർത്ഥം

പഞ്ചാംശം $\frac{1}{5}$, അളികുലം = വണ്ടിൻകൂട്ടം, കദംബമഗമ = കദംബ വൃക്ഷത്തിൽ പോയി, ത്ര്യംശം = $\frac{1}{3}$, ശിലീന്ധ്രം = കൈതപ്പൂവ്, തയോ വിശ്ലേഷം = അവയുടെ വ്യത്യാസം, ത്രിഗുണം = മൂന്നുമടങ്ങ്, മൃഗാക്ഷി = പേടമാൻ കണ്ണി, കുടജം = കുടകപ്പാല, ദോലായമാനം = അങ്ങു മിങ്ങും ആടി, അപര: = മറ്റൊന്ന്, കേതകീ = കൈതപ്പൂവ്, പ്രാപ് തൈകകാലം = ഒരേസമയം ലഭിക്കുവാൻ, ദൂതാഹൂത = മുരണ്ടു നടന്നു, ഇത:തതോ = ഇവിടെയും അവിടെയും, ഭ്രമതി = പറന്നു, ഖേ = ആകാശത്തിൽ, ഭൃംഗോƒളി = വണ്ടിൻ കൂട്ടം

സാരം

വണ്ടിൻകൂട്ടത്തിന്റെ അഞ്ചിലൊരുഭാഗം കദംബ പുഷ്പത്തിലേയ്ക്കു നീങ്ങി. അവയുടെ മൂന്നിലൊന്ന് കൈതപ്പൂവിലേക്കും പോയി. അവയുടെ എണ്ണത്തിന്റെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ മൂന്നിരട്ടി കുടകപ്പാലയിലേക്കും പോയി. ശേഷിച്ച ഒരു വണ്ട് കൈതപ്പൂവിന്റെയും മാലതിയുടെയും സുഗന്ധം ഒരേ സമയം ആസ്വദിക്കാനാഗ്രഹിച്ച് അങ്ങുമിങ്ങും മുരണ്ടു. ആകാശത്തിൽ പറന്നു. ഹേ, കാന്തേ, മൃഗാക്ഷി, ആ വണ്ടിൻ കൂട്ടത്തിന്റെ സംഖ്യ എത്രയെന്ന് പറഞ്ഞാലും.

വണ്ടിൻ കൂട്ടത്തിന്റെ എണ്ണം $= x$ എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

കദംബ വനത്തിൽ പോയത് $= \frac{x}{5}$

കൈതപ്പൂവിൽ പോയത് $= \frac{x}{3}$

അവയുടെ വ്യത്യാസം = $\frac{x}{3} - \frac{x}{5} = \frac{2x}{15}$

കുടകപ്പാലയിൽ പോയത് = $\frac{2x}{15} \times 3 = \frac{6x}{15}$

ശേഷിച്ചത് = 1

ആകെ വണ്ടുകൾ = $x = \frac{x}{5} + \frac{x}{3} + \frac{6x}{15} + 1 = \frac{14x}{15} + 1 = \frac{14}{15}x + 1$

അതായത് $\frac{x}{15} = 1$

വണ്ടുകളുടെ എണ്ണം $x = 15$

ഉദാഹരണം 43

പഞ്ചകശത ദത്തധനാൽ ഫലസ്യ വർഗ്ഗം വിശോധ്യ പരിശിഷ്ടം ദത്തം ദശക ശതേന തുല്യ: കാല: ഫലം ച തയോ:

അർത്ഥം

പഞ്ചകശതം = 100ന് 5 വച്ച്, ഫലം = പലിശ, പരിശിഷ്ടം = മിച്ചം, ദശകശതം = 100 ന് 10 വച്ച്, തുല്യകാലം = തുല്യമായകാലയളവ്.

സാരം

ഒരാൾ കുറച്ചു ധനം പ്രതിമാസം 100 ന് 5 എന്ന നിരക്കിൽ ഒരു കാലയളവിലേക്ക് പലിശയ്ക്കു കൊടുത്തു. പലിശയുടെ വർഗ്ഗം ധനത്തിൽ നിന്ന് കുറച്ച് ബാക്കി സംഖ്യ പ്രതിമാസം 100 ന് 10 എന്ന നിരക്കിൽ അതേ കാലയളവിലേയ്ക്കു പലിശക്കു കൊടുത്തപ്പോൾ രണ്ടിലും ഒരേ പലിശ ലഭിച്ചു. എന്നാൽ അയാളുടെ ധനം എത്ര?

അയാളുടെ ധനം = x, കാലയളവ് = n മാസം

പലിശ = $\frac{5}{100}xn$,പലിശയുടെ വർഗ്ഗം = $\frac{1 \times x^2 n^2}{400}$

മുതൽ - പലിശവർഗ്ഗം $= x - \frac{x^2n^2}{400} = x\left(1 - \frac{xn^2}{400}\right)$

ഇതിന്റെ 10%പലിശ അതേകാലയളവിലേക്കുള്ളത് = $\frac{10xn}{100}\left(1 - \frac{xn^2}{400}\right)$

പലിശ തുല്യമാണ് $\frac{5\times n}{100}=\frac{10\times n}{100}\left(1-\frac{xn^2}{400}\right)$

$1=2\left(1-\frac{xn^2}{400}\right)=2-\frac{xn^2}{200}$ $\quad\therefore\frac{xn^2}{200}=1$ അതായത് $xn^2=200$

$n=2$ എന്നു സങ്കല്പിച്ചാൽ $x=50$ രൂപാ എന്നു കിട്ടും.

ഉദാഹരണം 44

എകകക ശത ദത്ത ധനാൽ ഫലസ്യ വർഗ്ഗ വിശോധ്യ പരിശിഷ്ടം
പഞ്ചകശതേന ദത്തം തുല്യ: കാല: ഫലം ച തയോ:

അർത്ഥം

ഏകകകശതം = 100 ന് പ്രതിമാസം 1 എന്ന കണക്കിൽ

സാരം

100 ന് പ്രതിമാസം 1 എന്ന നിരക്കിൽ ഏതാനും സംഖ്യ ഒരു കാലയളവിലേക്കു പലിശക്കു കൊടുത്തു. അതിന്റെ പലിശ യുടെ വർഗ്ഗം മുതലിൽ നിന്നു കുറച്ച സംഖ്യ അതേ കാലയളവി ലേക്ക് 100ന് 5 എന്ന നിരക്കിൽ കടം കൊടുത്താൽ രണ്ടിലും ഒരേ പലിശ ലഭിക്കുമെങ്കിൽ കടം കൊടുത്ത തുക എത്ര?

ധനം $=x$, കാലം = n മാസം

പലിശ $=\frac{xn}{100}$ **പലിശവർഗ്ഗം** $=\frac{x^2n^2}{100^2}$

മുതൽ - പലിശവർഗ്ഗം $x-\frac{x^2n^2}{100^2}=x\left(1-\frac{xn^2}{100^2}\right)$

100 ന് 5 എന്ന നിരക്കിൽ ലഭിക്കുന്ന പലിശ $\frac{5xn}{100}\left(1-\frac{xn^2}{100{,}00}\right)$

തുല്യപലിശയായതിനാൽ

$$\frac{xn}{100}=\frac{5xn}{100}\left(1-\frac{xn^2}{100{,}00}\right)\quad 1=5-\frac{5xn^2}{100{,}00}\ \therefore xn^2=\frac{400{,}00}{5}=80{,}00$$

കാലയളവ് 4 മാസം എന്നു സങ്കല്പിച്ചാൽ

മൂലധനം $x=\frac{8000}{16}=500$ **രൂപ**

ഉദാഹരണം 45

മാണിക്യാഷ്ടകം ഇന്ദ്രനീലദശകം മുക്താഫലാനാം ശതം
സദ് വജ്രാണി ച പഞ്ച രത്ന വണിജാം
യേഷാം ചതുർണാം ധനം
സംഗസ്നേഹ വശേന തേ നിജധനാൽ
ദത്തൈകമേകം മിഥോ
ജാതാ തുല്യധനാഃ പൃഥക് വദ സഖേ
തദ് രത്ന മൗല്യാനി മേ

അർത്ഥം

രത്നവണിജാം = രത്നവ്യാപാരികൾ, സംഗസ്നേഹവശേന = കൂട്ടുകാരോടുള്ള സ്നേഹം മൂലം, ദത്തൈകമേകം = ഓരോന്നു കൊടുത്തു.

സാരം

8 മാണിക്യം **10** ഇന്ദ്രനീലം, **100** മുത്ത്, **5** വജ്രം എന്നിവ യഥാക്രമം **4** രത്നവ്യാപാരികളുടെ കൈവശമുണ്ടായിരുന്നു. കൂട്ടുകാരോടുള്ള സ്നേഹം മൂലം ഓരോരുത്തരും അവരവരുടെ ധനത്തിൽ നിന്ന് ഓരോ രത്നം വീതം മറ്റുള്ളവർക്കു നൽകിയപ്പോൾ അവർ എല്ലാം തുല്യധനവാന്മാരായി. ഹേ, സഖേ, ആ രത്നങ്ങളുടെ വില പ്രത്യേകം പ്രത്യേകം എന്നോടു പറഞ്ഞാലും.

ഓരോരുത്തരും ദാനം ചെയ്ത ശേഷം ഓരോരുത്തർക്കുമുള്ള ധനം കാണുക

ഒന്നാമന്റേത് **5** മാണിക്യം **+1** ഇന്ദ്രനീലം **+1** മുത്ത് **+1**വജ്രം
രണ്ടാമന്റേത് **1** മാണിക്യം **+7** ഇന്ദ്രനീലം **+1** മുത്ത് **+1**വജ്രം
മൂന്നാമന്റേത് **1** മാണിക്യം **+1** ഇന്ദ്രനീലം **+97**മുത്ത് **+1**വജ്രം
നാലാമന്റേത് **1** മാണിക്യം **+1** ഇന്ദ്രനീലം **+1** മുത്ത് **+2**വജ്രം

തുല്യധനവാന്മാരാകയാൽ **4** മാണിക്യത്തിന്റെ വില = **6** ഇന്ദ്രനീലത്തിന്റെ വില = **96** മുത്തിന്റെ വില = **1** വജ്രത്തിന്റെ വില

ഒരു വജ്രത്തിന്റെ മൂല്യം **96** എന്നു സങ്കല്പിക്കുക

ഒരു മാണിക്യത്തിന്റെ വില $= \frac{96}{4} = 24$

ഒരു ഇന്ദ്രനീലത്തിന്റെ വില $= \frac{96}{6} = 16$

ഒരു മുത്തിന്റെ വില $= \frac{96}{96} = 1$

ഉദാഹരണം 46

പഞ്ചകശതേന ദത്തം മൂലം സകലാന്തരം ഗതേ വർഷേ
ദ്വിഗുണം ഷോഡശ ഹീനം ലബ്ധം കിം മൂലം ആചക്ഷ്വ

അർത്ഥം

പഞ്ചകശതേന = **100** ന് **5** എന്ന നിരക്കിൽ, സകലാന്തരം = പലിശയുൾപ്പെടെ (കലാന്തരം = പലിശ), ഗതേ വർഷേ = കഴിഞ്ഞ വർഷത്തിൽ, ഷോഡശഹീനം = **16** കുറച്ചത്, ആചക്ഷ്വ = പറയുക, മൂലം = മൂലധനം

സാരം

100 ന് **5** എന്ന നിരക്കിൽ (പ്രതിമാസം) കഴിഞ്ഞവർഷം ഒരു സംഖ്യ പലിശയ്ക്കു കൊടുത്തു. മുതലും പലിശയും കൂട്ടിയത് മുതലിന്റെ ഇരട്ടിയിൽ നിന്നും **16** കുറച്ച തുകയാണ്. എന്നാൽ മൂലധനം എത്രയെന്നു പറയുക.

മൂലധനം $= x$, പലിശ = **5%**
മുതലും പലിശയും കൂട്ടി ഒരു വർഷത്തേക്ക് ആകെ

$$x + \frac{5 \times 12x}{100} = x\left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{8}{5}x$$

മുതലിന്റെ ഇരട്ടി $-16 = 2x - 16; \quad = \frac{8}{5}x, \quad \frac{2}{5}x = 16, x = 40$

ഉദാഹരണം 47

യത് പഞ്ചകദ്വിക ചതുഷ്ക ശതേന ദത്തം
ഖണ്ഡൈർ ത്രിഭിർ നവതിയുക് ത്രിശതീ ധനം തത്
മാസേഷു സപ്തദശ പഞ്ചസു തുല്യമാപ്തം
ഖണ്ഡത്രയേƒപി സകലം വദ ഖണ്ഡ സംഖ്യാം

അർത്ഥം

പഞ്ചക ദ്വിക ചതുഷ്കം = **5,2,4,** നവതിയുക്ത്രിശതി = **390,** സപ്തദശ പഞ്ചസു = **7, 10, 5,** ഖണ്ഡൈർ ത്രിഭി = **3** ഖണ്ഡങ്ങൾ

സാരം

100ന് പ്രതിമാസം **5,4,2** എന്ന നിരക്കിൽ **390** രൂപാ മൂന്നു ഭാഗങ്ങളാക്കി യഥാക്രമം **7,10,5** മാസങ്ങളിലേക്ക് പലിശയ്ക്കു

കൊടുത്തപ്പോൾ മുതൽ പലിശ ഉൾപ്പെടെ മൂന്നു ഭാഗങ്ങളും തുല്യമായാൽ ഖണ്ഡങ്ങളുടെ മൂല്യം എത്രയെന്നു പറയുക.

ഖണ്ഡസംഖ്യകൾ x, y, z എന്നിവയാണെന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

ഖണ്ഡം	പലിശനിരക്ക്	മാസം	മുതലും പലിശയും കൂട്ടിയത്
x	5	7	$x+\frac{x\times5\times7}{100}=\frac{135}{100}x$
y	7	10	$y+\frac{y\times2\times10}{100}=\frac{120}{100}y$
z	2	5	$z+\frac{z\times4\times5}{100}=\frac{120}{100}z$

അവ തുല്യസംഖ്യകളാകയാൽ $\frac{135}{100}x=\frac{120}{100}y=\frac{120}{100}z$.

അതായത് $27x=24y=24z \therefore y=z=\frac{9}{8}x$

$x+y+z=390$ രൂപ $\therefore x+\frac{9x}{8}+\frac{9x}{8}=\frac{26x}{8}=390$

$\therefore x=\frac{390\times8}{26}=120$ രൂപ **y = 135 രൂപ z =135 രൂപ**

ഉദാഹരണം 48

പുരപ്രവേശേ ദശദോ ദ്വിസംഗുണം
വിധായ ശേഷം ദശഭുക്ച നിർഗമേ
ദദൗ ദശൈവം നഗരത്രയേƒഭവത്
ത്രിനിഘ്ന മാദ്യം വദ തൽ കിയത് ധനം

അർത്ഥം

പുരപ്രവേശേ=നഗരത്തിൽ പ്രവേശിക്കുമ്പോൾ, ദശദോ=10 കൊടുത്തു, വിധായശേഷം=കച്ചവടത്തിനുശേഷം, ദശഭുക്ക്=10 ആഹാരത്തിനു കൊടുത്തു, നിർഗമേ=മടങ്ങുമ്പോൾ, ദദൗദശൈവം= 10 വീതം കൊടുത്തു, നഗരത്രയം= മൂന്നു നഗരം, ത്രിനിഘ്നമാദ്യം= ആദ്യ ധനത്തിന്റെ മൂന്നിരട്ടി, കിയത് ധനം=എത്ര ധനം

സാരം

ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ നഗരത്തിൽ പ്രവേശിക്കുമ്പോൾ 10 രൂപ ചുങ്കം കൊടുത്തു. കച്ചവടത്തിനു ശേഷം ശേഷിച്ച സംഖ്യ ഇരട്ടിയായി, അതിൽ നിന്നും പത്തുരൂപ ആഹാരത്തിനു കൊടുത്തു. നഗരം വിടുമ്പോൾ 10 രൂപ ചുങ്കം കൊടുത്തു. ശേഷിച്ച ധനം കൊണ്ടു അടുത്ത നഗരത്തിലേക്കു പോയി. അവിടെയും ചുങ്കത്തിനും ആഹാരത്തിനും ഇപ്രകാരം കൊടുത്തു. കച്ചവടത്തിൽ ധനവും ഇരട്ടിയായി. ഇങ്ങനെ മൂന്നു നഗരങ്ങളിൽ കച്ചവടം ചെയ്തശേഷം ആദ്യധനത്തിന്റെ മൂന്നിരട്ടി ധനം ഉണ്ടായി. എന്നാൽ അയാളുടെ ആദ്യധനം എത്രയെന്നു പറയുക.

ആദ്യധനം= x എന്നു സങ്കല്പിക്കുക

പ്രവേശന നികുതി കൊടുത്തത് = 10 രൂപ, ശേഷിച്ചത് = x-10

കച്ചവടത്തിനു ശേഷമുള്ള ധനം = 2(x-10)=2x-20

അതിൽനിന്ന് ആഹാരത്തിനും ചുങ്കത്തിനും കൊടുത്തത് = 10+10=20

ശേഷിച്ചത് = 2x-40

രണ്ടാമത്തെ നഗരത്തിൽ പ്രവേശനനികുതി കൊടുത്തത് = 10 രൂപ

ശേഷിച്ച ധനം = 2x-50

കച്ചവടത്തിനു ശേഷമുള്ള ധനം = 2 (2x-50) = 4x-100

ഭക്ഷണം, ചുങ്കം ഇവ കഴിച്ചുള്ള സംഖ്യ = 4x-120

മൂന്നാമത്തെ നഗരത്തിൽ പ്രവേശന നികുതി കൊടുത്തത്= 10

ശേഷിച്ച ധനം= 4x-130

കച്ചവടത്തിനു ശേഷമുള്ള ധനം= 2(4x-130)=8x-260

ഭക്ഷണം ചുങ്കം ഇവ കഴിച്ചുള്ള സംഖ്യ= 8x-280

ഇത് ആദ്യധനത്തിന്റെ മൂന്നിരട്ടിയാണ് = 3x

$3x = 8x - 280$

$5x = 280 \qquad x = \frac{280}{5} = 56$ രൂപ

ഉദാഹരണം 49

സാർധം തണ്ഡുല മാനകത്രയമഹോ ദ്രമ്മേണ മാനാഷ്ടകം മുദ്ഗാനാം ച യദി ത്രയോദശമിതാ ഏതാ വണിക് കാകിണി

ആദായാർപ്പയ തണ്ഡുലാംശ യുഗളം മുദ്ഗൈക ഭാഗാന്വിതം
ക്ഷിപ്രം ക്ഷിപ്രഭുജോ വ്രജേമ ഹി യുതഃ സാർധോഽഗ്രതോ യാസ്യതി.

അർത്ഥം

സാർധംത്രയം= $3\frac{1}{2}$, തണ്ഡുലം=ഉണക്കലരി, മുദ്ഗം=മുതിര, കാകിണി=ഒരു നാണയം, $\frac{1}{64}$ ദ്രമ്മം മാനാഷ്ടകം=8അളവ്, ഏതാ വണിക്=ഈ കച്ചവടക്കാരൻ, ആദായ=സ്വീകരിച്ച്, അർപ്പയ=തരിക, അംശയുഗളം=2 ഭാഗം, വ്രജേമ=പുറപ്പെടുന്നു, സാർധ=സഞ്ചാരികൾ, അഗ്രതോ യാസ്യതി=മുമ്പേ പോയി.

സാരം

ഒരു ദ്രമ്മത്തിന് $3\frac{1}{2}$ അളവ് ഉണക്കലരിയോ, 8 അളവ് മുതിരയോ കിട്ടും. ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ പറയുന്നു. 13 കാകിണി സ്വീകരിച്ച് രണ്ടു ഭാഗം അരിയും ഒരു ഭാഗം മുതിരയും വേഗം തരിക. ഞങ്ങൾക്ക് വേഗം ആഹാരം കഴിച്ച് പുറപ്പെടണം. ഞങ്ങളോടൊപ്പമുണ്ടായിരുന്ന യാത്രക്കാർ മുമ്പേ പുറപ്പെട്ടു കഴിഞ്ഞു. അരിക്കും മുതിരക്കും എന്തു വിലയായി.

ഒരു അളവ് അരിയുടെ വില $= \frac{2}{7}$ ദ്രമ്മം

ഒരു അളവ് മുതിരയുടെ വില $= \frac{1}{8}$ ദ്രമ്മം

കൊടുത്ത പണം =13 കാകിണി $= \frac{13}{64}$ ദ്രമ്മം

അരിയുടെ വില $= x$ എന്നും മുതിരയുടെ വില y എന്നും സങ്കൽപിക്കുക

അരിയുടെ അളവ് $= x \times \frac{7}{2}$

മുതിരയുടെ അളവ് $= y \times 8$

ആകെ വില $= x + y = \frac{13}{64}$ ദ്രമ്മം

അരിയുടെ അളവ് = മുതിരയുടെ അളവിന്റെ ഇരട്ടി.

$$x\times\frac{7}{2}=8y\times2=16y,\therefore y=\frac{7x}{32} \qquad x+y=x+\frac{7x}{32}=\frac{39}{32}x=\frac{13}{64}$$

$$\therefore x=\frac{13}{64}\times\frac{32}{39}=\frac{32}{3\times64}\text{ ദ്രമ്മം} \qquad =\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}\text{ കാകിണി}$$

മുതിരയുടെ വില $y=2\frac{1}{3}$ കാകിണി (ദ്രമ്മം= 64 കാകിണി)

ഉദാഹരണം 50

സാർധ പഞ്ചാംശ നവമൈർ യുക്താഃ കേ സ്യുഃ സമാഃ ത്രയഃ
അന്യാംശ ദ്വയഹീനായേ ഷഷ്ടിഃ ശേഷാഃ ച തദ് വദ .

അർത്ഥം

സാർധ പഞ്ചാംശ നവമൈർ യുക്താഃ $=\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{1}{9}$ എന്നീ ഭാഗങ്ങൾ കൂട്ടിയത്, സ്യുഃ സമഃ = സമമാകുന്നു, ത്രയ = മൂന്നു സംഖ്യകൾ, അന്യാംശ ദ്വയഹീനം = അന്യ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഭാഗങ്ങൾ കുറച്ചത്, ഷഷ്ടി = **60**

സാരം

മൂന്നു സംഖ്യകളോട് അവയുടെ $\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{1}{9}$ എന്നീ ഭാഗങ്ങൾ യഥാക്രമം കൂട്ടിയപ്പോൾ അവ തുല്യങ്ങളായി. ഓരോ സംഖ്യയിൽ നിന്നും മറ്റു രണ്ടെണ്ണത്തിന്റെ ഭാഗങ്ങൾ കുറച്ചപ്പോൾ അവയുടെ ഓരോന്നിന്റെയും മൂല്യം **60** വീതമായി. ആ മൂന്നു സംഖ്യകൾ എത്രയെന്നു പറയുക.

സംഖ്യകൾ x, y, z എന്നു സങ്കൽപിക്കുക

$$x\times\frac{3}{2}=y\times\frac{6}{5}=z\times\frac{10}{9} \qquad \therefore x=\frac{12}{15}y=\frac{20}{27}z$$

അതായത് $y=\frac{5}{4}x, z=\frac{27}{20}x, x-\frac{y}{5}-\frac{z}{9}=y-\frac{x}{2}-\frac{z}{9}=z-\frac{x}{2}-\frac{y}{5}=60$

അതായത് $x-\frac{5x}{4\times5}-\frac{27x}{20\times9}=x\left(1-\frac{1}{4}-\frac{3}{20}\right)=x\frac{12}{20}=60$

$$\therefore x = 60x\frac{20}{12} = 100 \qquad y = x \times \frac{5}{4} = \frac{100\times5}{4} = 125$$

$$z = \frac{27}{20}\times x = \frac{27\times100}{20} = 135$$

ഉദാഹരണം 51

ത്രയോദശ തഥാ പഞ്ച കരണ്യോ ഭുജയോർ മിതി
ഭൂരജ്ഞാതാƒത്ര ചത്വാരഃ ഫലം ഭൂമിം വദാƒശു മേ

അർത്ഥം

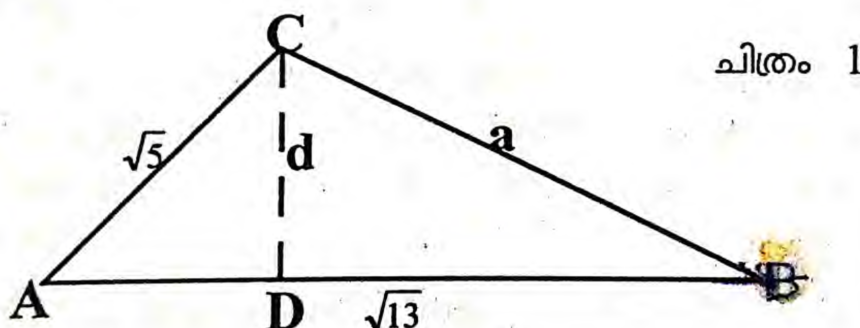
ത്രയോദശ തഥാ പഞ്ചകരണി $=\sqrt{13},\sqrt{5}$, ഭുജയോർ മിതി = ഭുജങ്ങളുടെ അളവ്, ഭൂരജ്ഞാതം = ഭൂമി(പാദം)യുടെ അളവ് അജ്ഞാതമാണ്, ചത്വാരം = **4**, ഫലം = വിസ്തീർണ്ണം

സാരം

ഒരു ത്രിഭുജത്തിൽ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ അളവ് $\sqrt{13},\sqrt{5}$ എന്നിവയാണ്. പാദത്തിന്റെ നീളം അജ്ഞാതമാണ്. വിസ്തീർണ്ണം **4** ആയാൽ അതിന്റെ ഭൂമി എത്രയെന്ന് പറയുക.

ABC എന്ന ത്രിഭുജത്തിൽ $AB=\sqrt{13}, AC=\sqrt{5}, BC=a, CD=d=$ ലംബം

വിസ്തീർണ്ണം= **4** $=\frac{\sqrt{13}}{2}d$



ചിത്രം 1

$$d=\frac{8}{\sqrt{13}} \therefore AD^2 = 5-\frac{64}{13}=\frac{1}{13} \qquad \therefore AD=\frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$BD=\sqrt{13}-\frac{1}{\sqrt{13}}=\frac{12}{\sqrt{13}}$$

$$BC^2 = CD^2+BD^2=\frac{64}{13}+\frac{144}{13}=\frac{208}{13}=16 \qquad \therefore BC=4$$ (പാദം)

ഉദാഹരണം 52

ദശ പഞ്ച കരണ്യന്തരം ഏകോ ബാഹു: പരഃ ഷഡ്കരണീ ഭൂരഷ്ടാദശ കരണീ രൂപോനാ ലംബം ആചക്ഷ്വ.

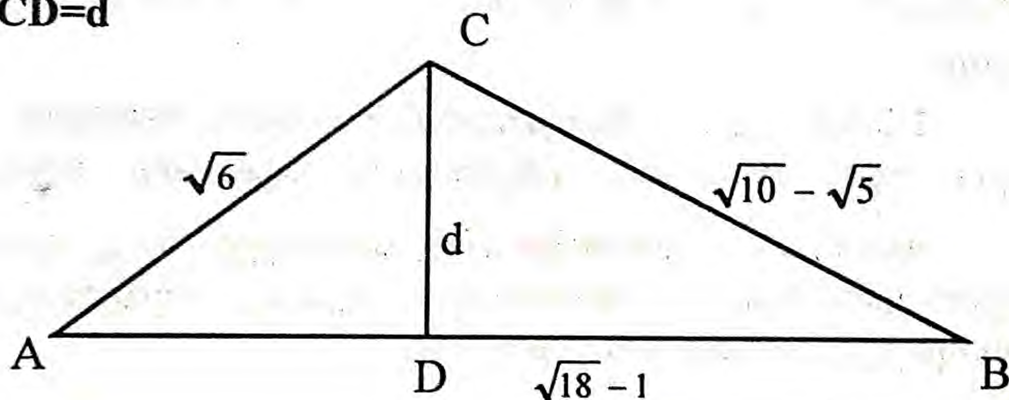
അർത്ഥം

ദശപഞ്ച കരണ്യന്തരം $= \sqrt{10} - \sqrt{5}$, ഷഡ്കരണി $= \sqrt{6}$ അഷ്ടാദശകരണി $\sqrt{18}$

സാരം

ഒരു ത്രിഭുജത്തിന്റെ ഒരു വശം $= \sqrt{10} - \sqrt{5}$ മറ്റേത് $\sqrt{6}$ ഭൂമി (പാദം) $= \sqrt{18} - 1$ ആയാൽ അതിന്റെ ലംബം എത്രയെന്നു പറയുക. ത്രിഭുജം **ABC** യിൽ, $AB = \sqrt{18} - 1$, $BC = \sqrt{10} - \sqrt{5}$, $AC = \sqrt{6}$ എന്നിവയാണ് വശങ്ങൾ.

ലംബം **CD=d**



ചിത്രം. 2

$$AD^2 = AC^2 - d^2 = 6 - d^2$$

$$BD^2 = \left(\sqrt{10} - \sqrt{5}\right)^2 - d^2 = 15 - 10\sqrt{2} - d^2$$

$$AD^2 - BD^2 = 6 - 15 + 10\sqrt{2} = 10\sqrt{2} - 9$$

$$AD + BD = \sqrt{18} - 1 = 3\sqrt{2} - 1$$

$$AD - BD = \frac{\left(10\sqrt{2} - 9\right)\left(3\sqrt{2} + 1\right)}{\left(3\sqrt{2} - 1\right)\left(3\sqrt{2} + 1\right)} = \frac{60 - 9 - 17\sqrt{2}}{17}$$

$$= 3 - \sqrt{2}$$

$$AD + BD = 3\sqrt{2} - 1$$

$$2AD = 3 - 1 + 2\sqrt{2} = 2\left(\sqrt{2} + 1\right)$$

$\therefore AD = \sqrt{2} + 1$

$CD^2 = d^2 = 6 - AD^2 = 6 - 3 - 2\sqrt{2} = 3 - 2\sqrt{2}$

$CD = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

ഉദാഹരണം 53

അസാമാന സമച്ഛേദാൻ രാശിം താം ചതുരോ വദ
യദൈക്യം യദ് ഘനൈക്യം വാ യേഷാം വർഗൈക്യ സമ്മിതം

അർത്ഥം

അസാമാന സമച്ഛേദാൻ രാശി = സമഛേദങ്ങളും **1:2:3:4** എന്ന അനുപാതത്തിലുമുള്ള അംശങ്ങളുമുള്ള ഭിന്ന സംഖ്യകൾ, ചത്വാരാ **= 4,** യദൈക്യം = അവയുടെ തുക, ഘനൈക്യം = രാശി ഘനങ്ങളുടെ തുക, വർഗൈക്യം = വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക.

സാരം

1:2:3:4 എന്ന അനുപാതത്തിൽ ഒരേഛേദങ്ങളുള്ള **4** സംഖ്യകളുടെ തുക അവയുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയ്ക്കു തുല്യമാകുന്നു.

അതേ അനുപാതത്തിൽ ഒരേ ഛേദമുള്ള നാലു സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയും ഘനങ്ങളുടെ തുകയും തുല്യമാകുന്നു. ഇവ രണ്ടിലുമുള്ള സംഖ്യകൾ കാണുക.

സംഖ്യകൾ $x, 2x, 3x, 4x$ എന്നിങ്ങനെയാണെന്നു കരുതുക.
സംഖ്യായോഗം = $x + 2x + 3x + 4x = 10x$

അവയുടെ വർഗ്ഗയോഗം $x^2 + 4x^2 + 9x^2 + 16x^2 = 30x^2$

അവ തുല്യമാകുന്നു. അതായത്

$10x = 30x^2 \qquad \therefore x = \frac{1}{3}$

സംഖ്യകൾ $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}$

സംഖ്യകളുടെ ഘനൈക്യം $x^3 + 8x^3 + 27x^3 + 64x^3 = 100x^3$

വർഗ്ഗൈക്യം = ഘനൈക്യം

$30x^2 = 100x^3 - \therefore x = \frac{3}{10}$

സംഖ്യകൾ $\frac{3}{10}, \frac{3}{5}, \frac{9}{10}, \frac{12}{10}$ എന്നിവ

ഉദാഹരണം 54

ത്ര്യസ്രക്ഷേത്രസ്യ യസ്യ സ്യാൽ ഫലം കർണ്ണേന സമ്മിതം
ദോ: കോടി ശ്രുതി ഘാതേന സമം യസ്യ ച തദ് വദ

അർത്ഥം

ത്ര്യസ്ര ക്ഷേത്രം = ത്രിഭുജം, ഫലം = വിസ്തീർണ്ണം, സമ്മിതം = തുല്യമായത്, ദോ = ബാഹു.

സാരം

ഏതു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം അതിന്റെ കർണ്ണത്തിന്റെ അളവിനു തുല്യമാകുന്നു?

ഏതു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം അതിന്റെ ബാഹുകോടി കർണ്ണങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിനു തുല്യമാകുന്നു?

ആ ത്രിഭുജങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ അളവുകൾ പറയുക.

മട്ടത്രിഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങൾ $3x, 4x, 5x$ എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

വിസ്തീർണ്ണം $= \frac{3x \times 4x}{2} = 6x^2$ ഇത് കർണ്ണത്തിനു തുല്യമാകുന്നു.

അതായത് $5x = 6x^2$ $x = \frac{5}{6}$ വശങ്ങൾ $\frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{25}{6}$

എന്നിവയാകുന്നു.

മട്ടത്രിഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങൾ $3x, 4x, 5x$ എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

വിസ്തീർണ്ണം $= 6x^2$

വശങ്ങളുടെ ഗുണിതം $= 3x \times 4x \times 5x = 60x^3$

$6x^2 = 60x^3$ അതിൽനിന്നും $x = \frac{1}{10}$ എന്നു കിട്ടും

വശങ്ങൾ $\frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}$ എന്നിവയാകുന്നു.

ഈ പ്രശ്നത്തിൽ മറ്റു ത്രിഭുജങ്ങളും സ്വീകരിക്കാവുന്നതാണ്. $5x, 12x, 13x$ എന്നിങ്ങനെ വശങ്ങളായാൽ വിസ്തീർണ്ണം $= 30x^2$ എന്നാകും. കർണ്ണം $= 13x$

$13x = 30x^2 \therefore x = \frac{13}{30}$ എന്നാകും.

$\frac{65}{30}, \frac{26}{5}, \frac{169}{30}$ വശങ്ങൾ എന്നിവയുമാകും.

അതുപോലെ വശങ്ങൾ ഗുണിച്ചത് $780x^3, 30x^2 = 780x^3 \therefore x = \frac{1}{26}$

വശങ്ങൾ $\frac{5}{26}, \frac{12}{26}, \frac{1}{2}$ എന്നിവയാകും. ഇപ്രകാരം അനവധി മൂല്യങ്ങൾ കണ്ടെത്താനാകും.

ഉദാഹരണം 55

യുത്യൌ വർഗ്ഗൌ*f*ന്തരോ വർഗ്ഗോ യയോർ ഘാതേ ഘനോഭവേത്
തൗരാശീ ശീഘ്രം ആചക്ഷ്വ ദക്ഷോ*f*സി ഗണിതേ യദി

അർത്ഥം

യുതി = തുക, ഘാതം = ഗുണിതം, ദക്ഷൻ = വിദഗ്ധൻ.

സാരം

ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയും വ്യത്യാസവും വർഗ്ഗസംഖ്യകളും അവയുടെ ഗുണിതം ഘന സംഖ്യയുമാകുന്നു. ആ സംഖ്യകൾ ഏവ എന്ന് ഗണിതത്തിൽ സമർത്ഥനാണെങ്കിൽ അങ്ങ് വേഗം പറഞ്ഞാലും.

സംഖ്യകൾ x, y എന്നിങ്ങനെ സങ്കല്പിക്കുക.

x + y = വർഗ്ഗസംഖ്യ

x - y = വർഗ്ഗസംഖ്യ

xy = ഘന സംഖ്യ

ഇവിടെ x, y എന്നിവയ്ക്ക് ആദ്യ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങൾ ശരിയാകുന്ന വിധം മൂല്യങ്ങൾ സങ്കല്പിക്കുക.

$x = 5z^2$

$y = 4z^2$ എന്നു കരുതിയാൽ

$x + y = 9z^2 = (3z)^2 \qquad x - y = z^2 \qquad xy = 20z^4$

ഇത് ഒരു ഘനസംഖ്യയാകാൻ $xy = (10rz)^3$ എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

$xy = 20z^4 = 1000r^3z^3$ $z = 50r^3$

ഇവിടെ r ഒരു ഇഷ്ടസംഖ്യയാകാം

r = 1 എന്നു സങ്കല്പിച്ചാൽ **z = 50**

$x = 5z^2 = 5\times 50^2 = 12500$ $y = 4z^2 = 4\times 50^2 = 10000$

r =2 എന്നു സങ്കല്പിച്ചാൽ $z = 50\times 8 = 400$

$x = 5z^2 = 5\times 160000 = 800000$ $y = 4z^2 = 4\times 160000 = 640000$

ഉദാഹരണം 56

ഘനൈക്യം ജായതേ വർഗ്ഗോ വർഗ്ഗൈക്യം ച യയോർ ഘനഃ
തൗ ചേൽ വേത്സി തദാƒഹം ത്വാം മന്യേ ബീജവിദാം വരം

അർത്ഥം

ഘനൈക്യം = ഘന (സംഖ്യകളുടെ)ങ്ങൾ കൂട്ടിയത്, വർഗ്ഗൈക്യം = വർഗ്ഗ(സംഖ്യകളുടെ) ങ്ങളുടെ തുക, ത്വാം മന്യേ ബീജവിദാംവരം = താങ്കളെ ബീജഗണിതജ്ഞന്മാരിൽ ശ്രേഷ്ടനായി കരുതാം.

സാരം

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഘനങ്ങളുടെ തുക ഒരു വർഗ്ഗസംഖ്യയും അവയുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക ഒരു ഘന സംഖ്യയുമാണ്. ആ സംഖ്യകൾ അറിയുമെങ്കിൽ പറയുക. ഞാൻ അങ്ങയെ ബീജഗണിതജ്ഞന്മാരിൽ ശ്രേഷ്ടനായി കരുതാം.

നിർദ്ദിഷ്ട സംഖ്യകൾ x, **y** എന്നു കരുതുക.

$x^3 + y^3$ ഒരു വർഗ്ഗസംഖ്യ $x^2 + y^2 =$ ഒരു ഘനസംഖ്യ

ഇവിടെ x, **y** എന്നിവയ്ക്ക് ഒരു അവ്യക്തസംഖ്യ സങ്കല്പിക്കണം

$x = z^2$ എന്നും $y = 2z^2$ എന്നും സങ്കല്പിച്ച് ഘനയോഗത്തിൽ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ.

$x^3, y^3 = z^6 + 8z^6 = 9z^6$ എന്ന വർഗ്ഗസംഖ്യയാകും. തുടർന്ന് $x^2 + y^2 =$ $z^4 + 4z^4 = 5z^4$. $5z^4$ എന്നത് ഒരു ഘനസംഖ്യയാകാൻ **z**, **5z** ന്റെ ഗുണിതമാകണം. അതായത് $5z^4 = (5pz)^3 = 125p^3z^3$ ഇതിൽ നിന്നും $z = 25p^3$ എന്ന ഉത്തരമാകും **p=1** എന്നു സങ്കല്പിച്ചാൽ **z = 25**എന്നും $x = z^2 = 625$, $y = 2z^2 = 1250$ എന്നും ഉത്തരമാകും.

p = 2 എന്നു സങ്കല്പിച്ചാൽ $z = 25 \times p^3 = 200, x = 200^2 = 40000$ എന്നും y = 80000 എന്നും ഉത്തരമാകും

ഇത്തരം ചോദ്യങ്ങൾക്ക് പൊതുവായ ഒരു നിർധാരണരീതി ഇപ്രകാരമാണ്.

$x = mz^2, y = nz^2$ എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

$x^3+y^3=(m^3+n^3)z^6$ ഇത് ഒരു വർഗ്ഗസംഖ്യയാണ്

$x^3+y^3=u^2=(m^3+n^3)z^6=p^2z^6$

അഥവാ $u = pz^3$ ഇവിടെ $m^3+n^3=p^2$ എന്നു സങ്കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഇതിൽ നിന്നും അടുത്ത സമവാക്യം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യണം.

$x^2+y^2=v^3=(m^2+n^2)z^4$

$v = \gamma z$ എന്നു വീണ്ടും സങ്കല്പിക്കുമ്പോൾ

$(m^2+n^2)z^4=\gamma^3 z^3$ എന്നും അതിൽ നിന്നും

$z = \frac{\gamma^3}{m^2+n^2}$ എന്നും $x = mz^2 = \frac{m\gamma^6}{(m^2+n^2)^2}$

$$y = nz^2 = \frac{n\gamma^6}{(m^2+n^2)^2}$$

എന്നും മൂല്യങ്ങൾ കാണാം.

γ എന്നതിന് 1, 2, 3 എന്നിങ്ങനെ ഏതു സംഖ്യയും സങ്കല്പിക്കാം. എന്നാൽ m^3+n^3 ഒരു വർഗ്ഗസംഖ്യ (p^2) എന്നാകും

$m = 1, n = 2$ എന്നതിൽ നിന്നും $p^2 = 9, p = 3$

അതായത് $z = \frac{\gamma^3}{m^2+n^2} = \frac{\gamma^3}{1+4} = \frac{\gamma^3}{5}$

$$x = z^2 = \frac{\gamma^6}{25}, \quad y = z^2 = \frac{2\gamma^6}{25}$$

ഇത് പൂർണ്ണസംഖ്യകളാകാൻ $\gamma = 5$ എന്നു സങ്കല്പിക്കുക

$z = 25$

$x = \frac{5^6}{25} = 5^4 = 625, \qquad y = 2 \times 625 = 1250$

$y = 10$ എന്നു സങ്കല്പിച്ചാൽ $z = 200$

$x = \frac{10^6}{25} = 4\times10^4$ എന്നും $y = 8\times10^4$ എന്നും മൂല്യങ്ങൾ

ഇപ്രകാരം മറ്റുമൂല്യങ്ങളും കാണാം.

$y = 15, 20$ തുടങ്ങിയ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുക

ഉദാഹരണം 57

യത്ര ത്ര്യസ്രേ ക്ഷേത്രേ ധാത്രീ മനു സമ്മിതാ സഖേ ബാഹു ഏകഃ പഞ്ചദശാൻ അന്യഃ ത്രയോദശ വദാവലംബകം തത്ര

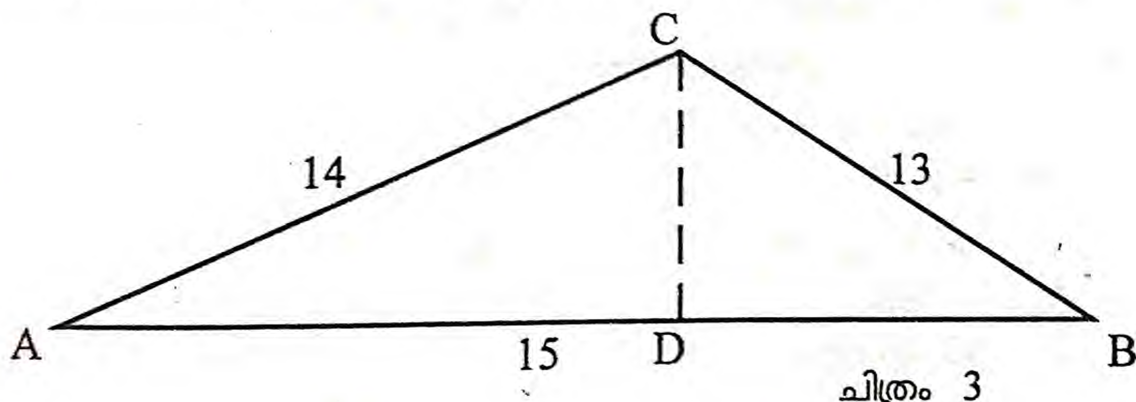
അർത്ഥം

ത്ര്യസ്രം = ത്രിഭുജം, മനുസമ്മിതം = 14 അളവ്, ധാത്രി = പാദം, പഞ്ചദശം = 15, ത്രയോദശം = 13

സാരം

ഒരു ത്രിഭുജത്തിൽ പാദം 14 ഒരുവശം 15, മറ്റേവശം 13 എന്നിങ്ങനെ അളവുണ്ടെങ്കിൽ അതിന്റെ ലംബം എത്രയെന്നു പറയുക.

ത്രിഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 14,15,13 എന്നിവയാണ്.



ചിത്രം 3

ഭുജയോഗാർധം $= \frac{14+15+13}{2} = 21$

വിസ്തീർണ്ണം $= \sqrt{(21-14)(21-15)(21-13)21}$

$= \sqrt{21\times7\times6\times8} = 84$

ലംബം $= \frac{84\times2}{\text{പാദം}} = \frac{168}{14} = 12$

ഉദാഹരണം 58

യദി സമഭൂവി വേണുർ ദ്വിത്രിപാണി പ്രമാണോ
ഗണക, പവന വേഗാൽ ഏകദേശേ സഭഗ്നഃ
ഭൂവി നൃപമിത ഹസ്തേഷ്വംഗ ലഗ്നം തദഗ്രം
കഥയ കതിഷ്വുമൂലാൽ ഏഷ ഭഗ്നഃ കരേഷു.

അർത്ഥം

സമഭൂവി = സമനിരപ്പായ തറയിൽ, ദ്വിത്രിപാണി = 32 ഹസ്തം, പവനവേഗാൽ = കാറ്റിന്റെ ശക്തിയാൽ, സഭഗ്നഃ = ഒടിഞ്ഞു, നൃപമിതം=16 അളവ്, അംഗലഗ്നം = അറ്റം തൊട്ടു.

സാരം

സമനിരപ്പായ ഭൂമിയിൽ 32 ഹസ്തം നീളമുള്ള ഒരു മുള നില്ക്കുന്നു. കാറ്റിന്റെ ശക്തികൊണ്ട് അത് ഒരിടത്ത് ഒടിഞ്ഞു അറ്റം 16 ഹസ്തം അകലത്തായി ഭൂമിയിൽ തൊട്ടിരിക്കുന്നു. ചുവട്ടിൽ നിന്നും എത്ര ഉയരത്താണ് മുള ഒടിഞ്ഞതെന്നു പറഞ്ഞാലും.

മുളയുടെ നീളം AB = 32 ഹസ്തം

മുറിഞ്ഞ ഭാഗത്തിന്റെ നീളം = $AC = x$

ശേഷിച്ച അളവ് $= 32 - x$

ACD എന്ന ത്രിഭുജത്തിൽ

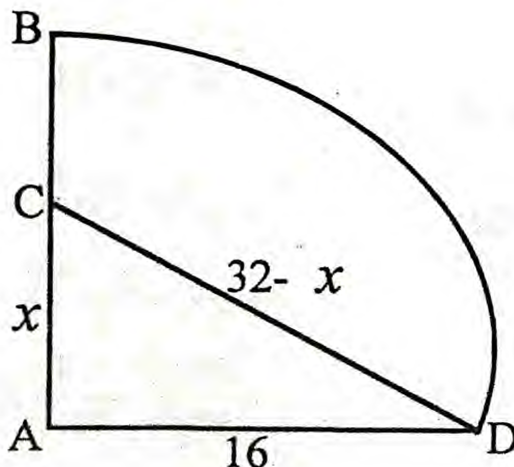
$AC = x$, AD = 16, CD = $32 - x$

$AC^2 + AD^2 = CD^2$

$x^2 + 16^2 = (32 - x)^2 = 1024 - 64x + x^2$

$64x = 768$

$x = 12$ ഹസ്തം



ചിത്രം 4

ഉദാഹരണം 59

ചക്ര ക്രൗഞ്ചാകുലിത സലിലേ ക്വാപി ദൃഷ്ടം തടാകേ
തോയാദ് ഊർധ്വം കമല കലികാഗ്രം വിതസ്തി പ്രമാണം.
മന്ദം മന്ദം ചലിതം അനിലേനാഹതം ഹസ്ത യുഗ്മേ
തസ്മിൻ മഗ്നം ഗണക കഥയ ക്ഷിപ്രം അംബു പ്രമാണം

അർത്ഥം

ചക്രം = ചക്രവാകപക്ഷി, ക്രൗഞ്ചം = കൊക്ക്, ആകുലിതം = ഇളകിയ, സലിലം = ജലം, ക്വാപി = ഒരിടത്ത്, ദൃഷ്ടം = കാണപ്പെട്ടു, തോയാദ് ഊർധ്വം = ജലനിരപ്പിനു മുകളിൽ, കമല കലികാഗ്രം = താമരമൊട്ടിന്റെ അറ്റം, വിതസ്തി = $\frac{1}{2}$ ഹസ്തം, പ്രമാണം = അളവ്, അനിലേന ആഹതം = കാറ്റടിച്ച്, ഹസ്തയുഗ്മം = 2ഹസ്തം, മഗ്നം = മുങ്ങി, കഥയ = പറയുക, അംബു പ്രമാണം = ജലത്തിന്റെ അളവ് (ആഴം)

സാരം

ചക്രവാകപക്ഷികളാലും കൊക്കുകളാലും ഇളക്കപ്പെട്ട തടാകത്തിലെ ജലത്തിൽ ഒരിടത്ത് ഒരു താമരമൊട്ടിന്റെ അറ്റം ജലനിരപ്പിനു മുകളിൽ $\frac{1}{2}$ ഹസ്തം ഉയർന്നു നിൽക്കുന്നതായി കാണപ്പെട്ടു.

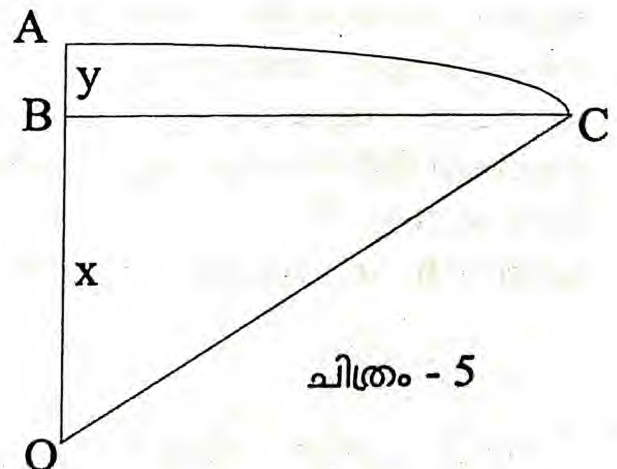
മന്ദമാരുതനടിച്ച് അതു രണ്ടു ഹസ്തം അകലത്തായി ജലത്തിൽ മുങ്ങി. ഹേ ഗണക, ജലത്തിന്റെ ആഴം എത്രയെന്നു വേഗം പറഞ്ഞാലും.

ജലത്തിന്റെ ആഴം x എന്ന് കരുതുക.

$$OA = OC = x + \frac{1}{2}$$

$$BC = 2$$

$$x^2 + 2^2 = (x + \frac{1}{2})^2$$



ചിത്രം - 5

$x^2 + 4 = x^2 + x + \frac{1}{4}$ $x = 3\frac{3}{4}$ ജലത്തിന്റെ ആഴം $3\frac{3}{4}$ ഹസ്തം

ഉദാഹരണം 60

വൃക്ഷാൽ ഹസ്ത ശതോച്ഛ്രയാഃ ശതയുഗേ
വാപീം കപിഃ കോƒപ്യഗാദ്
ഉത്തീര്യാഥപരോ ദ്രുതം ശ്രുതിപഥാൽ
പ്രോഡ്ഢീയ കിഞ്ചിൽ ദ്രുമാൽ
ജാതൈവം സമതാ തയോർ യദി ഗതാഃ
ഉഡ്ഢീയ മാനം കിയത്
വിദ്വം ചേൽ സുപരിശ്രമോƒസ്തി ഗണിതേ
ക്ഷിപ്രം തദാചക്ഷ്വമേ

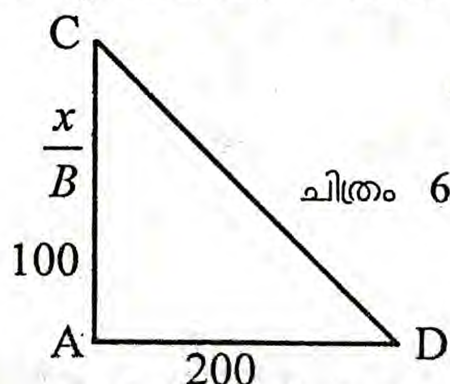
അർത്ഥം

വൃക്ഷാൽ = വൃക്ഷത്തിൽ നിന്ന്, ഹസ്തശതം = **100** ഹസ്തം, ഉച്ഛ്രയം = ഉയരം, ശതയുഗേ = **200**, വാപി = കുളം, കപി = വാനരൻ, അഗാദ് = എത്തിച്ചേർന്നു, ഉത്തീര്യ = ഇറങ്ങി, ദ്രുതം = വേഗത്തിൽ, ശ്രുതിപഥം = കർണ്ണമാർഗ്ഗം, പ്രോഡ്ഢീയ = മേലോട്ടു ചാടി, കിഞ്ചിൽ = അല്പം, ദ്രുമാൽ = മരത്തിലൂടെ, സമതാ = തുല്യമായി, തയോർഗതി = അവ സഞ്ചരിച്ച ദൂരം, ഉഡ്ഢീയ മാനം = ചാടിയ അളവ്, കിയത് = എത്ര.

സാരം

ഒരു വൃക്ഷത്തിൽ **100** ഹസ്തം ഉയരത്തായി **2** വാനരന്മാർ സ്ഥിതിചെയ്തിരുന്നു. വൃക്ഷത്തിൽനിന്നും **200** ഹസ്തം അകലത്തായി ഒരു കുളത്തിലേക്ക് ഒരു വാനരൻ വൃക്ഷത്തിൽ നിന്നും ഇറങ്ങി നടന്നുപോയി. മറ്റേ വാനരൻ വൃക്ഷത്തിലൂടെ അല്പം മുകളിലേക്ക് കയറി തടാകത്തിലേക്കുള്ള കർണ്ണമാർഗ്ഗം തടാകത്തിലെത്തി. രണ്ടുപേരും സഞ്ചരിച്ച ദൂരം തുല്യമാണെങ്കിൽ രണ്ടാമത്തെ വാനരൻ മേൽപോട്ടു ചാടിയ ഉയരം എത്രയെന്ന് താങ്കൾ ഗണിതത്തിൽ പരിശ്രമിയും വിദ്വാനുമാണെങ്കിൽ വേഗം എന്നോടു പറഞ്ഞാലും.

ചിത്രം **6** നോക്കുക



ചിത്രം 6

മേല്പോട്ടു ചാടിയ ഉയരം x എന്ന് സങ്കല്പിക്കുക

AB=100 ഹസ്തം

AD=200 ഹസ്തം

BC=x ഹസ്തം

$CD^2=(100+x)^2+200^2$

$=10000+200x+x^2+40000$

$=50000+200x+x^2$

രണ്ടു വാനരന്മാരും സഞ്ചരിച്ച ദൂരം തുല്യമാണ്.

BAD=BCD

BAD=100+200=300

BCD=x+CD

അതായത് $x+\sqrt{x^2+200x+50000}=300$

$(300-x)^2=x^2+200x+50000$

$=90000-600x+x^2$

$90000-50000=200x+600x$

$40000=800x$

$x=50$ ഹസ്തം

ഉദാഹരണം 61

പഞ്ചദശദശകരോച്ഛ്രായവേണ്വോരജ്ഞാതമധ്യഭൂമികയോഃ
ഇതരേതരമൂലാഗ്രഗസൂത്രയുതേർ ലംബമാനം ആചക്ഷ്വ

അർത്ഥം

പഞ്ചദശം = 15, ദശം = 10, ഉച്ഛ്രായ = ഉയരം, മധ്യഭൂമി = ഇടയ്ക്കുള്ള അകലം, ഇതരേതര മൂല അഗ്രഗസൂത്രം = ഒന്നിന്റെ ചുവട്ടിൽനിന്നും മറ്റേതിന്റെ അഗ്രം വരെയുള്ള, ചരട്ട് സൂത്രയുതി = ചരടുകൾ യോജിക്കുന്ന സ്ഥലം

സാരം

15, 10 ഹസ്തങ്ങൾ വീതം ഉയരമുള്ള രണ്ടു മുളകൾ അജ്ഞാത ദൂരത്തിൽ ഭൂമിയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. പരസ്പരം ചുവടുകളും, അറ്റങ്ങളും ബന്ധിക്കുന്ന ചരടുകൾ സന്ധിക്കുന്നിടത്തെ ഉയരം എത്രയെന്ന് പറയുക

ചിത്രം 7-ൽ

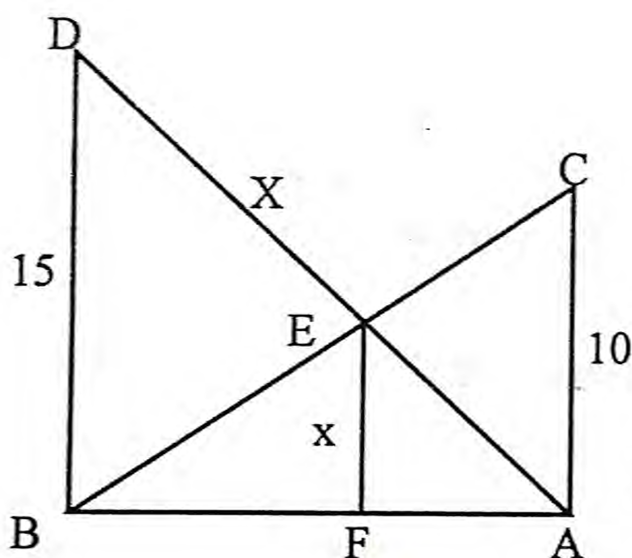
AC=10 ഹസ്തം

BD=15 ഹസ്തം

BC യും AD യും E യിൽ സന്ധിക്കുന്നു.

EF സന്ധിയിൽ നിന്നുള്ള ലംബം $= x$

$$\frac{AC}{x} = \frac{AB}{BF}$$



ചിത്രം 7

$$\frac{BD}{x} = \frac{AB}{AF}$$ അഥവാ $$\frac{x}{BD} = \frac{AF}{AB} = \frac{AB - BF}{AB} = 1 - \frac{BF}{AB}$$

$$\frac{BF}{AB} = \frac{x}{AC}; \therefore \frac{x}{BD} = 1 - \frac{x}{AC}$$

$$x\left(\frac{1}{BD} + \frac{1}{AC}\right) = x\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{10}\right) = \frac{25}{150}x = 1$$

$\therefore x = \frac{150}{25} = 6$ ഹസ്തം

അദ്ധ്യായം 8

മധ്യമാഹരണം

ദ്വിഘാത സമവാക്യങ്ങളുടെ (**Quadratic Equation**) നിർദ്ധാരണ മാർഗ്ഗങ്ങളാണ് ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്. $ax^2+bx+c=0$ എന്ന സമവാക്യത്തെ $ax^2+bx=-c$ എന്നും എഴുതാം. a,b,cഎന്നിവയുടെ നിശ്ചിതമൂല്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് x ന്റെ മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുന്ന വിധമാണ് ഇവിടെ വിവരിക്കുന്നത്.

കർണസൂത്രം 44

അവ്യക്തവർഗ്ഗാദി യദാവശേഷം
പക്ഷൌ തദേഷ്ടേന നിഹത്യ കിഞ്ചിൽ
ക്ഷേപ്യം തയോർയേന പദപ്രദഃ സ്യാൽ
അവ്യക്തപക്ഷസ്യ പദേന ഭൂയഃ
വ്യക്തസ്യ പക്ഷസ്യ സമക്രിയൈവം
അവ്യക്തമാനം ഖലു ലഭ്യതേ തത്
നനിർവ്വഹച്ഛേദ് ഘന വർഗ്ഗ വർഗ്ഗേ-
ƒപ്യേവം തദാ ജ്ഞേയമിദം സ്വബുദ്ധ്യാ
അവ്യക്ത മൂലർണ്ണഗ രൂപതോƒല്പം
വ്യക്തസ്യ പക്ഷസ്യ പദം യദി സ്യാൽ
ഋണം ധനം തച്ച വിധായ സാധ്യം
അവ്യക്ത മാനം ദ്വിവിധം ക്വചിൽ തത്

അർത്ഥം

അവ്യക്തവർഗ്ഗാദി = അവ്യക്തസംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം മുതലായവ, ഇഷ്ടേന നിഹത്യ = ഇഷ്ടസംഖ്യ കൊണ്ട് ഗുണിച്ച്, ക്ഷേപ്യം = കുറയേണ്ടത്, പദപ്രദം = വർഗ്ഗമൂലമുണ്ടാകുന്നത്, സമക്രിയ = സമീകരണം, ഘനവർഗ്ഗ വർഗ്ഗം = ഘനവും വർഗ്ഗത്തിന്റെ വർഗ്ഗവും, നനിർവഹം = ക്രിയ ചെയ്യാൻ പ്രയാസമാണ്, മൂലർണ്ണഗം = ന്യൂനമൂലത്തിൽ നിന്നുണ്ടാകുന്ന, രൂപതോƒല്പം=ചെറിയ സംഖ്യ.

സാരം

സമവാക്യത്തിലെ അവ്യക്തസംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം മുതലായ ഘടകങ്ങൾ ഒരു ഭാഗത്തും ബാക്കിയുള്ളവ മറുപക്ഷത്തും മാറ്റുക. അവയെ ഇഷ്ടസംഖ്യകൊണ്ടു് ഗുണിച്ച് അവയ്ക്ക് വർഗ്ഗമൂലം

ലഭിക്കുന്നവിധം സംഖ്യ കൂട്ടുകയോ മറ്റോ ചെയ്യുക. വ്യക്ത സംഖ്യകളിലും ഇതേമാതിരിക്രിയകൾ ചെയ്യുക. അവയുടെ വർഗ്ഗമൂലങ്ങളിൽ നിന്നും അവ്യക്തഘടകത്തിന്റെ മൂല്യം ലഭിക്കുന്നു.

അവ്യക്തസംഖ്യയുടെ ഘനവും വർഗ്ഗവർഗ്ഗവും ഉണ്ടെങ്കിൽ ഈ ക്രിയ അസാധ്യമാണ്. അവിടെ സ്വന്തം ബുദ്ധി ഉപയോഗിച്ച് ക്രിയചെയ്തു മൂല്യങ്ങൾ കാണേണ്ടതാണ്.

അവ്യക്തസംഖ്യയുള്ള ഭാഗത്തെ സംഖ്യ ന്യൂനസംഖ്യയും മറുവശത്തെ വർഗ്ഗമൂലസംഖ്യയെക്കാൾ കുറവുമായ ആ മൂലത്തിനു ധന ന്യൂന ചിഹ്നങ്ങൾ ആരോപിച്ച് അവ്യക്ത ഘടകത്തിന് രണ്ടു മൂല്യങ്ങൾ കാണണം. ചിലപ്പോൾ അവ രണ്ടും സാധുവാകാം.

$\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c} = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തെ $\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x = -\mathbf{c}$ എന്നാക്കി ഇരുഭാഗത്തും **a** കൊണ്ടു ഗുണിക്കുക.

$\mathbf{a}^2 x^2 + \mathbf{ab}x = -\mathbf{ac}$ എന്ന സമവാക്യം ലഭിക്കുന്നു.

ഇടതുവശത്തെ ഘടകങ്ങൾ ഒരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗമാക്കാൻ $\frac{b^2}{4}$ ഘടകം കൂടി കൂട്ടണം. അതായത്

$$a^2x^2 + abx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - ac = \frac{b^2 - 4ac}{4}$$

ഇടതുവശത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം $= \left(ax + \frac{b}{2}\right)$

വലതുവശത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം $= \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$

ഇടതുവശത്തെ വർഗ്ഗമൂലത്തിലുള്ള സംഖ്യ $\frac{b}{2}$ എന്നാണ്.

ഇത് ന്യൂനസംഖ്യയും വലതുവശത്തെ വർഗ്ഗമൂലം അതിനേക്കാൾ കുറവുമാണെങ്കിൽ ആ ഘടകത്തിനു ധനന്യൂന ചിഹ്നങ്ങൾ സങ്കല്പിച്ച് അവ്യക്ത സംഖ്യയ്ക്ക് രണ്ടു മൂല്യങ്ങൾ കാണാം. അതായത്

$$x = \frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ചില പ്രശ്നങ്ങളിൽ ഈ രണ്ടു മൂല്യങ്ങളും ശരിയാകാം.

കരണസൂത്രം 45

ചതുരാഹത വർഗ്ഗസമൈ രൂപൈ: പക്ഷദ്വയം ഗുണയേത്
പൂർവ്വാവ്യക്തസ്യ കൃതേഃ സമരൂപാണി ക്ഷിപേത്തയോരേവ ഇതി

അർത്ഥം

ചതുരാഹതം = 4 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്, വർഗ്ഗസമൈരൂപം = വർഗ്ഗഘടകത്തിന്റെ ഗുണകസംഖ്യ, പക്ഷദ്വയം = ഇരുവശവും, പൂർവ്വാവ്യക്തസ്യ കൃതി = മുൻ അവ്യക്ത സംഖ്യയുടെ ഗുണകത്തിന്റെ വർഗ്ഗം

സാരം

സമവാക്യത്തിലെ അവ്യക്തവർഗ്ഗഘടകത്തിന്റെ ഗുണകാരത്തിന്റെ നാലിരട്ടികൊണ്ട് ഇരുപക്ഷവും ഗുണിക്കുക. അവ്യക്തഘടകത്തിന്റെ ഗുണകാരത്തിന്റെ വർഗ്ഗം ഇരുവശത്തും ചേർക്കുക. ഇതാണ് (വർഗ്ഗമൂലം കാണാനുള്ള) മാർഗ്ഗം. (ഇത് ശ്രീധരാചാര്യർ നിർദ്ദേശിച്ചിട്ടുള്ള മാർഗ്ഗമാണ്) അതായത് $ax^2+bx=-c$ എന്നതിനെ $4a$ കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് b^2 കൂട്ടണം.

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$$ അഥവാ

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac$$ എന്നും $$2ax+b=\sqrt{b^2-4ac}$$

എന്നതിൽ നിന്നും $$2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ഉദാഹരണം 62

അളികുലദലമൂലം മാലതിം യാതം അഷ്ടൗ
നിഖില നവമ ഭാഗാൽ ചാളിനീ ഭൃംഗമേകം
നിശി പരിമളലുബ്ധം പത്മമധ്യേ നിരുദ്ധം
പ്രതിരണതി രണന്തം ബ്രൂഹി കാന്തേfളി സംഖ്യാം

അർത്ഥം

അളികുലം = വണ്ടിൻകുലം, ദലമൂലം = പകുതിയുടെ വർഗ്ഗമൂലം, യാതം=പോയി, അഷ്ടൗ നിഖില നവമഭാഗം=ആകെയുള്ളതിന്റെ $\frac{8}{9}$ ഭാഗം അളിനി = പെൺവണ്ട് ഭൃംഗമേകം = ഒരു വണ്ട് നിശി = രാത്രിയിൽ പരിമള ലുബ്ധം=സുഗന്ധത്തിലുള്ള ലോഭം മൂലം, പത്മമധ്യേനിരുദ്ധം = താമരക്കുള്ളിൽ കുടുങ്ങി, പ്രതിരണതി = ഒത്തുമൂളുന്നു.

സാരം

വണ്ടിൻകൂട്ടത്തിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗ്ഗമൂലവും സംഖ്യയുടെ $\frac{8}{9}$ ഭാഗവും ചേർന്ന എണ്ണം മാലതിവൃക്ഷത്തിലേക്കു പോയി. ഒരു വണ്ട് പരിമളത്തിലുള്ള ആസക്തിയാൽ രാത്രിയിൽ താമരക്കുള്ളിൽ അകപ്പെട്ടു. ശേഷിച്ച ഒരു പെൺവണ്ട് അതിനു ചുറ്റും ഒത്തുമൂളിക്കൊണ്ടിരുന്നു. ഹേ, കാന്തേ വണ്ടിൻകൂട്ടത്തിന്റെ സംഖ്യ എത്രയെന്നു പറയുക.

വണ്ടിൻകൂട്ടത്തിന്റെ എണ്ണം $2x^2$ എന്ന് സങ്കല്പിക്കുക

അതിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗ്ഗമൂലം $= x$

വണ്ടിൻകൂട്ടത്തിന്റെ $\frac{8}{9}$ ഭാഗം $= 2x^2 \times \frac{8}{9} = \frac{16x^2}{9}$

ശേഷിച്ച വണ്ട്=2(ഒന്ന് താമരക്കുള്ളിലും ഒന്നു പുറത്തും)

$2x^2 = x + \frac{16x^2}{9} + 2$ $\qquad 2x^2 - \frac{16x^2}{9} - x = 2$

അതായത് $\frac{2}{9}x^2 - x = 2$

ഇരുവശത്തും $4\times\frac{2}{9}$ കൊണ്ടു ഗുണിക്കുക $\frac{16x^2}{9\times 9} - \frac{8x}{9} = \frac{16}{9}$

ഇരുവശത്തും x ന്റെ ഗുണകാരവർഗ്ഗം കൂട്ടുക$(1)^2=1$

$$\frac{16x^2}{9\times 9} - \frac{8x}{9} + 1 = \frac{16}{9} + 1 = \frac{25}{9}$$

വർഗ്ഗമൂലം കാണുക. $\frac{4}{9}x - 1 = \pm\frac{5}{3}$

ഇടതുവശത്തെ ഘടകത്തിലെ സംഖ്യ ന്യൂനവും വലതു വശത്തെ വർഗ്ഗത്തേക്കാൾ കുറവുമാണ്.

$$\frac{4}{9}x = 1 \pm \frac{5}{3} = \frac{8}{3} or \frac{-2}{3}$$

$x = \frac{8}{4} \times \frac{9}{4} = 6$ $or = \frac{-2}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{-3}{2}$ വണ്ടിൻകൂട്ടത്തിന്റെ എണ്ണം

$$\therefore x = 6$$

$= 2x^2 = 2\times 6^2 = 72$ അഥവാ $2x^2 = \frac{9}{2}$ ഇത് സ്വീകാര്യമല്ല.

ഇവിടെ ഒരു മൂല്യം മാത്രമേ സാധുവാകുന്നുള്ളൂ.

ഉദാഹരണം 63

പാർഥഃ കർണ്ണവധായ മാർഗണ ഗണം
ക്രൂദ്ധോ രണേ സംദധേ
തസ്യാർധേന നിവാര്യ തൽ ശരഗണം
മൂലൈഃ ചതുർഭിഃ ഹയാൻ
ശല്യം ഷഡ്ഭിഃ രഥേഷുഭിഃ ത്രിഭിരപി
ഛത്രം ധ്വജം കാർമുകം
ചിഛേദാസ്യശിരഃ ശരേണ കതി തേ
യാനർജ്ജുനഃ സംദധേ

അർത്ഥം

പാർഥൻ = അർജ്ജുനൻ, കർണ്ണവധായ = കർണ്ണവധത്തിനായി, മാർഗ്ഗണ ഗണം=ശരക്കൂട്ടം, ക്രൂദ്ധോ=കോപിഷ്ഠനായി, രണേ=യുദ്ധത്തിൽ, സംദധേ = ധരിച്ചു(എടുത്തു), തസ്യാർധേന = അതിൽ പകുതികൊണ്ടു, നിവാര്യ = നശിപ്പിച്ചു, മൂലൈ = വർഗ്ഗമൂല സംഖ്യയാൽ, ചതുർഭി= നാലിരട്ടി, ഹയാൻ = കുതിരകളെ, ശല്യം = ശല്യരെ, ഷഡ്ഭി=6 എണ്ണത്താൽ, ഛത്രം = കുട, ധ്വജം = കൊടി, കാർമുകം = വില്ല്, ചിച്ഛേദ = മുറിച്ചു, അസ്യശിരഃ = അയാളുടെ(കർണ്ണന്റെ) തല, കതി = എത്ര.

സാരം

അർജ്ജുനൻ കർണ്ണവധത്തിനായി ക്രൂദ്ധനായി ശരഗണം യുദ്ധത്തിലെടുത്തു. അതിൽ പകുതികൊണ്ട് കർണ്ണശരങ്ങളെ തടുത്തു. ശരഗണ മൂലത്തിന്റെ നാലിരട്ടി കൊണ്ടു കുതിരകളെയും 6 ശരങ്ങൾ കൊണ്ട് ശല്യരെയും രഥത്തെയും മൂന്നു ശരങ്ങൾ കൊണ്ട്, കുട, കൊടി, വില്ല് എന്നിവയെയും ഒരു ശരം കൊണ്ട് കർണ്ണശിരസ്സിനെയും ച്ഛേദിച്ചു. എന്നാൽ അർജ്ജുനൻ എടുത്ത ശരങ്ങളെത്ര?

അർജ്ജുനൻ എടുത്ത ശരങ്ങളുടെ എണ്ണം= $4x^2$ എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

കർണ്ണ ശരങ്ങളെ തടുക്കാനുപയോഗിച്ചത് $= 2x^2$
കുതിരകളെ വധിക്കാനുപയോഗിച്ചത് $= 2x \times 4 = 8x$
ശല്യരെയും രഥത്തെയും എയ്തത് $= 6$
കുട, കൊടി, വില്ല് എന്നിവ തകർക്കാൻ ഉപയോഗിച്ചത് $= 3$
കർണ്ണ ശിരഛേദത്തിനു ഉപയോഗിച്ചത് $= 1$

ആകെ ശരങ്ങൾ

$4x^2 = 2x^2 + 8x + 6 + 3 + 1$

$2x^2 - 8x = 10$

ഇരുവശവും $2 \times 4 = 8$ കൊണ്ടു ഗുണിക്കുക

$16x^2 - 64x = 80$

ഇരുവശവും $8^2 = 64$ കൂട്ടുക

$16x^2 - 64x + 64 = 80 + 64 = 144$

$4x - 8 = 12 \qquad 4x = 12 + 8 = 20$

$x = 5$

ശരഗണം $4x^2 = 4 \times 25 = 100$

ഉദാഹരണം 64

വ്യേകസ്യ ഗച്ഛസ്യദലം കിലാദിർ
ആദേർദലം തൽ പ്രചയം ഫലം ച
ചയാദി ഗച്ഛാഭിഹതിഃ സ്വ സപ്ത
ഭാഗാധികം ബ്രൂഹി ചയാദി ഗച്ഛാൻ

അർത്ഥം

ഗച്ഛം = ഘടകസംഖ്യ (ഒരു സാധാരണ ഗണിത ശ്രേണിയിലെ), വ്യേകം = ഒന്നു കുറച്ചത്, ദലം = പകുതി, കിലാദി = ശ്രേണിയിലെ ആദ്യഘടകം, ആദേർദലം = ആദ്യഘടകത്തിന്റെ പകുതി, പ്രചയം= ഘടകങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം, ഫലം = ശ്രേണികളുടെ തുക, ചയാദി ഗച്ഛാഭിഹതി = ചയം, ആദ്യഘടകം, ഗച്ഛസംഖ്യ, ഇവയുടെ ഗുണിതം, സ്വസപ്തഭാഗം = അതിന്റെ ഏഴിലൊന്നു ഭാഗം.

സാരം

ഒരു സാധാരണ ഗണിത ശ്രേണി **(Arithmetic series)**യുടെ ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിൽ നിന്നും ഒന്നു കുറച്ചതിന്റെ പകുതിയാണ് ശ്രേണിയിലെ ആദ്യഘടകം. ആദ്യഘടകത്തിന്റെ പകുതിയാണ്, ഘടക വ്യത്യാസം (ചയം). ഘടകസംഖ്യ, ആദ്യഘടകം, ചയം എന്നിവയുടെ ഗുണിതവും അതിന്റെ ഏഴിലൊന്നും കൂട്ടിയ സംഖ്യയാണ് ശ്രേണിയുടെ മൂല്യം എന്നാൽ ശ്രേണിയുടെ ആദ്യ ഘടകം, ചയം, ഘടകസംഖ്യ എന്നിവ കാണുക.

ഗച്ഛസംഖ്യ = **n** എന്നു സങ്കല്പിക്കുക

ആദ്യഘടകം $= \dfrac{n-1}{2}$

ചയം $= \dfrac{n-1}{4}$

ശ്രേണീഫലം $= n\frac{(n-1)}{2}\times\frac{(n-1)}{4}\times\frac{8}{7} = n\frac{(n-1)^2}{7}$

അന്ത്യഘടകം = ആദ്യഘടകം + (n -1) ചയം

$$= \frac{n-1}{2} + \frac{(n-1)(n-1)}{4}$$

$$\frac{n-1}{2}\times\left[\frac{n-1}{2}+1\right] = \frac{(n-1)(n+1)}{4}$$

$\frac{(\text{അന്ത്യഘടകം + ആദ്യഘടകം})}{2}$ × ഗച്ഛസംഖ്യ = ശ്രേണീഫലം

$$=\left[\frac{(n-1)(n+1)}{4} + \frac{(n-1)}{2}\right]\frac{n}{2}$$

$$=\frac{(n-1)n}{2\times2} + \left[1+\frac{n+1}{2}\right] = \frac{(n-1)n}{4}\frac{(n+3)}{2} = n\frac{(n-1)^2}{7}$$

$$\therefore \frac{n-1}{7} = \frac{n+3}{8}$$

$$\therefore 8n-8 = 7n+21$$

$\therefore n = 21+8 = 29$ ഗച്ഛസംഖ്യ

ആദ്യഘടകം $\longrightarrow = \frac{29-1}{2} = 14$

ചയം $\longrightarrow = \frac{14}{2} = 7$

ഉദാഹരണം 65

രാശിർ ദ്വാദശനിഘ്നോ
രാശിഘനാഢ്യഃ കഃ സമോ യഃ സ്യാൽ
രാശികൃതിഃ ഷഡ്ഗുണിതാ
പഞ്ചത്രിംശത് യുതാ വിദ്വാൻ

അർത്ഥം

രാശിർദ്വാദശ നിഘ്നോ = സംഖ്യയെ 12 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്, രാശിഘനാഢ്യാ = രാശിയുടെ ഘനം കൂട്ടിയത്, രാശികൃതി = രാശിവർഗ്ഗം, പഞ്ചത്രിംശത് = 35

സാരം

ഹേ, വിദ്വാൻ ഏതു രാശിയെ 12 കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് രാശിയുടെ ഘനം കൂട്ടിയത്, ആ രാശിയുടെ വർഗ്ഗത്തെ 6 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 35 കൂട്ടിയതിനു തുല്യമാകുന്നു, ആ സംഖ്യ എത്ര?

അവ്യക്തസംഖ്യ $= x$ എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

$12x + x^3 = 6x^2 + 35$

അതായത് $x^3 - 6x^2 + 12x = 35$

$x^3 - 6x(x-2) - 8 = 35 - 8 = 27$

$(x-2)^3 = 27$

$x - 2 = 3$

$x = 5$

ഉദാഹരണം 66

കോ രാശിർദ്വിശതീ ക്ഷുണ്ണോ രാശി വർഗ്ഗയുതോ ഹതഃ
ദ്വാഭ്യാം തേനോനിതോ രാശി വർഗ്ഗവർഗ്ഗോƒയുതം ഭവേത്
രൂപോനം വദ തം രാശിം വേത്സി ബീജക്രിയാം യദി

അർത്ഥം

ദ്വിശതി = 200, രാശിവർഗ്ഗയുതോ = രാശിവർഗ്ഗം കൂട്ടിയത്, ദ്വാഭ്യാം = രണ്ടു കൊണ്ടു, തേനോനിതോ = അതുകുറച്ചത്, രാശി വർഗ്ഗവർഗ്ഗം = രാശിയുടെ വർഗ്ഗത്തിന്റെ വർഗ്ഗം, അയുതം = 10,000, രൂപോനം = ഒന്നു കുറച്ചത്.

സാരം

ഏതു സംഖ്യയെ 200 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അതിന്റെ വർഗ്ഗവും കൂട്ടി 2 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അതിന്റെ വർഗ്ഗ വർഗ്ഗത്തിൽ നിന്നും കുറച്ചത് 9999 ആകുന്നുവോ ആ സംഖ്യ എത്രയെന്ന് ബീജക്രിയ അറിയുമെങ്കിൽ പറയുക.

അവ്യക്ത സംഖ്യ x എന്നു സങ്കല്പിക്കുക

$x^4 - 2(200x + x^2) = 9999$

അതായത് $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$

$$x^4+2x^2+1 = 4x^2+400x+10,000$$

$$(x^2+1)^2 = 4(x+50)^2$$

$$x^2+1 = 2(x+50) = 2x+100$$

$$x^2-2x+1 = 100$$

$$(x-1)^2 = 10^2$$

$x-1 = 10$ അഥവാ -10

$x = 11$ അഥവാ -9

ഉദാഹരണം 67

വനാന്തരാളേ പ്ലവഗാഷ്ടഭാഗഃ
സംവർഗ്ഗിതോ വൽഗതി ജാതരാഗഃ
ഫൂൽക്കാരനാദപ്രിതിനാദ ഹൃഷ്ടാ
ദൃഷ്ടാ ഗിരൌ ദ്വാദശ തേ കിയന്തഃ

അർത്ഥം

വനാന്തരാളം = വനത്തിനുള്ളിൽ, പ്ലവഗം = വാനരൻ, അഷ്ടഭാഗം = $\frac{1}{8}$, സംവർഗ്ഗിതം = വർഗ്ഗത്തോളം, ഫൂൽക്കാരനാദ പ്രതിനാദം = അട്ടഹാസധ്വനിയുടെ പ്രതിധ്വനി, ഹൃഷ്ട്വാ = ആകർഷിക്കപ്പെട്ട്, ഗിരൌ = മലയിൽ

സാരം

വനത്തിനുള്ളിൽ വാനരസംഘത്തിന്റെ എട്ടിലൊന്നിന്റെ വർഗ്ഗത്തോളം എണ്ണം ആഹ്ളാദപൂർവ്വം തുള്ളിച്ചാടിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നു. അവയുടെ അട്ടഹാസത്തിന്റെ പ്രതിധ്വനിയിൽ ആഹ്ലാദിച്ച് ശേഷിച്ച 12 എണ്ണം പർവ്വതത്തിൽ കാണപ്പെട്ടു. വാനരസംഘത്തിന്റെ എണ്ണം എത്ര?

വാനരസംഘത്തിലെ എണ്ണം x എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

വനത്തിനുള്ളിൽ പോയത് $=\left(\frac{x}{8}\right)^2$ ശേഷിച്ചത് $= 12$

ആകെ എണ്ണം $=\left(\frac{x}{8}\right)^2+12=x$; $\frac{x^2}{64}-x=-12$

$\frac{1}{64}$ ന്റെ നാലിരട്ടി കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്

$$\frac{4x^2}{64\times 64}-\frac{4\times x}{64}=\frac{-12\times 4}{64}=\frac{-3}{4}$$

വർഗ്ഗമാക്കാൻ ചേർക്കേണ്ടത് = 1

$$\frac{4x^2}{64\times 64}-\frac{4\times x}{64}+^1=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

അതായത് $$\left(\frac{2}{64}x-1\right)^2=\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{2}{64}x-1=\pm\frac{1}{2}$$ $$\frac{2}{64}x=\frac{1}{2}$$ അഥവാ $$\frac{3}{2}\therefore x=16$$

അഥവാ 48

വാനരസംഘത്തിലെ എണ്ണം = 48 അഥവാ 16

ഉദാഹരണം 68

യൂഥാൽ പഞ്ചാംശകഃ ത്ര്യൂനോ വർഗ്ഗിതോ ഗഹ്വരം ഗതഃ ദൃഷ്ടഃ ശാഖാമൃഗഃ ശാഖാം ആരൂഢോ വദ തേ കതി കർണ്ണസ്യ ത്രിലവേനോനാ ദ്വാദശാംഗുല ശങ്കുഭാ ചതുർദ്ദശാംഗുലാ ജാതാ ഗണക ബ്രൂഹി താം ദ്രുതം

അർത്ഥം

യൂഥം = കൂട്ടം, പഞ്ചാംശകം = $\frac{1}{5}$, ത്ര്യൂനം = 3 കുറച്ചത്, ഗഹ്വരം = ഗുഹ, ദൃഷ്ടഃ = കാണപ്പെട്ടു, ശാഖാമൃഗം = വാനരൻ, ആരൂഢോ = കയറിഇരുന്നു, ത്രിലവേന ഊനോ = $\frac{1}{3}$ കുറച്ചത്, ദ്വാദശാംഗുലം = 12 അംഗുലം, ശങ്കുഭാ = കുറ്റിയുടെ നിഴൽ, ചതുർദ്ദശാംഗുലാ = 14 അംഗുലം

സാരം

വാനരക്കൂട്ടത്തിന്റെ അഞ്ചിലൊന്നിൽ നിന്നും 3 കുറച്ച സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗത്തോളം എണ്ണം ഗുഹയിൽ കടന്നു. ശേഷിച്ച ഒരു വാനരൻ മരത്തിന്റെ കൊമ്പിൽ കയറി ഇരിക്കുന്നതായി കാണപ്പെട്ടു. വാനരസംഘത്തിലെ എണ്ണം എത്രയെന്നു പറയുക.

12അംഗുലം ഉയരമുള്ള ഒരു കുറ്റിയുടെ നിഴലിന്റെ നീളത്തിൽ നിന്നും കർണ്ണത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നു കുറച്ചത് 14 അംഗുലമാണ്. ഹേ ഗണകാ, നിഴലിന്റെ നീളം എത്രയെന്നു പറയുക.

ഇവിടെ രണ്ടു ചോദ്യങ്ങളാണുള്ളത്.

1) വാനരക്കൂട്ടത്തിന്റെ എണ്ണം 2) നിഴലിന്റെ അളവ്

വാനരക്കൂട്ടത്തിന്റെ എണ്ണം

യൂഥസംഖ്യ $= x$ എന്നു സങ്കല്പിക്കുക

ഗുഹയിൽ കടന്നത് $= \left[\frac{x}{5} - 3\right]^2$ ശേഷിച്ചത് $= 1$

ആകെ

$$\left[\frac{x}{5} - 3\right]^2 + 1 = x$$

$$\frac{x^2}{25} - \frac{6}{5}x + 9 + 1 = x$$

$$x^2 - 30x + 250 = 25x$$

$$x^2 - 55x + 250 = 0$$

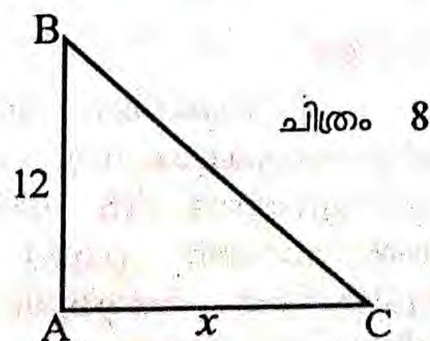
$$x^2 - 55x + \left[\frac{55}{2}\right]^2 = \left[\frac{55}{2}\right]^2 - 250 = \frac{2025}{4} = \left[\frac{45}{2}\right]^2$$

$$x - \frac{55}{2} = \frac{45}{2} \quad \therefore\ x = \frac{55 \pm 45}{2} = 50$$ അഥവാ 5

ഇവിടെ $x = 5$ എന്നത് പ്രസക്തമല്ല.

2) നിഴൽ അളവ്

കുറ്റി AB = 12 അംഗുലം, നിഴലിന്റെ നീളം x എന്നു സങ്കല്പിക്കുക



ചിത്രം 8

കർണ്ണം $= BC = \sqrt{x^2 + 144}$

$$x - \frac{\sqrt{x^2 + 144}}{3} = 14$$

അതായത് $\frac{\sqrt{x^2 + 144}}{3} = x - 14$

$$x^2 + 144 = 9(x-14)^2 = 9x^2 - 252x + 1764$$

$$\therefore 8x^2 - 252x = -1620$$

2 കൊണ്ടു ഹരിച്ചു ലഘൂകരിച്ചത്

$$4x^2 - 126x = -810$$

$$4x^2 - 126x + \left(\frac{63}{2}\right)^2 = \left(\frac{63}{2}\right)^2 - 810 = \frac{729}{4} = \left(\frac{27}{2}\right)^2$$

$$\left(2x - \frac{63}{2}\right)^2 = \left(\frac{27}{2}\right)^2$$

$$\left(2x - \frac{63}{2}\right) = \pm\left(\frac{27}{2}\right) \therefore 2x = \frac{63 \pm 27}{2} = 45$$ അഥവാ 18

$\therefore x = 22\frac{1}{2} =$ അഥവാ 9 അംഗുലം (നിഴലിന്റെ നീളം)

ഉദാഹരണം 69

ചത്വാരോ രാശയഃ കേതേ മൂലദാ യേ ദ്വിസംയുതാഃ
ദ്വയോർ ദ്വയോർ യഥാസന്ന ഘാതാൽ ചാഷ്ടാ/ദശാന്വിതഃ
മൂലദാഃ സർവ്വമൂലൈക്യാദ് ഏകാദശയുതാൽ പദം
ത്രയോദശ സഖേ ജാതം ബീജജ്ഞ വദ താൻ മമ.

അർത്ഥം

ചത്വാരോരാശയ = 4 സംഖ്യകൾ, ദ്വിസംയുതാ = 2 കൂട്ടിയത്, ദ്വയോർ ദ്വയോർ യഥാസന്ന ഖാതാൽ = രണ്ടു അടുത്ത സംഖ്യകൾ വീതം ഗുണിച്ചത്, അഷ്ടാദശാന്വിതം = 18 കൂട്ടിയത്, ഏകാദശ യുത = 11 കൂട്ടിയത്.

സാരം

4 സംഖ്യകൾ ഓരോന്നിനോടും രണ്ടു വീതം കൂട്ടിയാൽ വർഗ്ഗസംഖ്യകളാകുന്നു. അടുത്തടുത്ത രണ്ടു സംഖ്യകൾ വീതം ഗുണിച്ചവയോട് 18 വീതം കൂട്ടിയവയും വർഗ്ഗസംഖ്യകളാകുന്നു. മേൽ പറഞ്ഞ (ഏഴ്) വർഗ്ഗമൂലങ്ങൾ കൂട്ടിയതിനോട് 11 കൂട്ടിയതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം 13 ആയാൽ ആ സംഖ്യകൾ ഹേ, ബീജജ്ഞ, എന്നോടു പറയുക.

ഈ പ്രശ്നം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാനുള്ള നിയമം അടുത്ത കരണസൂത്രത്തിൽ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്.

ഓരോ സംഖ്യയോടും 2 വീതം കൂട്ടിയത്‌വർഗ്ഗസംഖ്യകളാണ് അതിനാൽ വർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ മൂലങ്ങൾ x_1,x_2,x_3,x_4 എന്നു സങ്കല്പിച്ചാൽ സംഖ്യകൾ ഇപ്രകാര ാായിരിക്കും.

$$a_1=x_1^2-2 \qquad a_2=x_2^2-2$$

$$a_3=x_3^2-2 \qquad a_4=x_4^2-2$$

a_1,a_2,a_3,a_4 എന്നീ നാലു സംഖ്യകൾ ഓരോ വർഗ്ഗസംഖ്യകളിൽ നിന്നും 2 വീതം കുറച്ചവയാകുന്നു. അവയിൽ അടുത്തടുത്ത രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണിതങ്ങൾ യഥാക്രമം a_1a_2,a_2a_3,a_3a_4 എന്നിവയാണ്. ഇവ ഓരോന്നിനോടും 18 വീതം കൂട്ടിയ സംഖ്യകളും വർഗ്ഗസംഖ്യകളാകുന്നു.

ആ മൂന്നു വർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ മൂലങ്ങൾ യഥാക്രമം x_5,x_6,x_7 എന്നിവയായാൽ

$a_1a_2+18=x_5^2$ അഥവാ $x_5^2-18=a_1a_2$

$a_2a_3+18=x_6^2$ " $x_6^2-18=a_2a_3$

$a_3a_4+18=x_7^2$ " $x_7^2-18=a_3a_4$

ഇത്തരം പ്രശ്നങ്ങളിൽ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണിതവും അടുത്ത വർഗ്ഗസംഖ്യകളുമായുള്ള വ്യത്യാസ(18)ത്തെ സംഖ്യകളും അടുത്ത വർഗ്ഗസംഖ്യകളുമായുള്ള വ്യത്യാസം (2) കൊണ്ടു ഹരിക്കുക. ഇവിടെ $18\div2=9$ ഇതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം (3) ആയിരിക്കും സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗമൂലങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം

അതായത് $x_2=x_1+3$

$$x_3=x_2+3=x_1+6$$

$$x_4=x_3+3=x_1+9$$

ഈ നിയമം ഇവിടെ ഉപയോഗിച്ച് വർഗ്ഗസംഖ്യകൾ $x, (x+3), (x+6), (x+9)$ എന്നിങ്ങനെ സങ്കല്പിക്കുക. ഇതിൽ നിന്നും.

$$a_1 = x^2 - 2$$

$$a_2 = (x+3)^2 - 2$$

$$a_3 = (x+6)^2 - 2$$

$$a_4 = (x+9)^2 - 2$$

അതായത്

$$\sqrt{a_1+2} = x$$

$$\sqrt{a_2+2} = x+3$$

$$\sqrt{a_3+2} = x+6$$

$$\sqrt{a_4+2} = x+9$$

ഈ നാലു വർഗ്ഗമൂലങ്ങൾ കൂട്ടിയത് $4x+18 = x_1+x_2+x_3+x_4$

$$a_1a_2 = (x^2-2)(x+3)^2-2) = (x^2-2)(x^2+6x+7)$$

$$a_1a_2+18 = x^4+6x^3+5x^2-12x+4 = (x^2+3x-2)^2$$

അതായത് $\sqrt{a_1a_2+18} = x^2+3x-2 = x_5$

അടുത്ത ഗുണിതം

$$a_2a_3 = \left[(x+3)^2-2\right] \times \left[(x+6)^2-2\right]$$

$$= (x^2+6x+7)(x^2+12x+34)$$

$$= x^4+18x^3+113x^2+288x+238$$

$$\sqrt{a_2a_3+18} = x^2+9x+16 = x_6$$

അടുത്ത ഗുണിതം

$$a_3 a_4 = \left[(x+6)^2-2\right] \times \left[(x+9)^2-2\right]$$

$$(x^2+12x+34)(x^2+18x+79)$$

$$a_3 a_4+18 = x^4+30x^3+329x^2+1560x+2704$$

$$\sqrt{a_3 a_4+18} = x^2+15x+52 = x_7$$

വർഗ്ഗമൂലസംഖ്യകൾ (ഗുണിതങ്ങൾ 3 എണ്ണം)

$$x_5 = x^2+3x-2$$

$$x_6 = x^2+9x+16$$

$$x_7 = x^2+15x+52$$

ആദ്യ വർഗ്ഗമൂലങ്ങളുടെ തുക $=4x+1$

ആകെ $=3x^2+31x+84$

ഇതിനോട് 11 കൂട്ടിയത് 13ന്റെ വർഗ്ഗമായിരിക്കും

$$3x^2+31x+84+11=169$$

അതായത് $3x^2+31x=74$

x^2 ന്റെ ഗുണകത്തിന്റെ (3) നാലിരട്ടി (12) കൊണ്ടു ഗുണിക്കുമ്പോൾ

$$36x^2+372x=888$$

ഇരുവശത്തും $31^2=961$ വീതം കൂട്ടുക

$36x^2+372x+961=1849$ വർഗ്ഗമൂലം കാണുമ്പോൾ

$(6x+31)=43$ അതായത് $6x=43-31=12$

$x = 2$ അതിൽ നിന്നും

സംഖ്യകൾ $a_1=2^2-2=2$ $a_2=(2+3)^2-2=23$

$$a_3=(2+6)^2-2=62 \quad a_4=(2+9)^2-2=119$$

കരണസൂത്രം 46

രാശിക്ഷേപാൽ വധക്ഷേപോ യദ്ഗുണഃ തത് പദോത്തരം
അവ്യക്തരാശയഃ കല്പ്യാ വർഗ്ഗിതാഃ ക്ഷേപ വർജ്ജിതാഃ

അർത്ഥം

രാശിക്ഷേപം = (വർഗ്ഗത്തിൽ നിന്നു) സംഖ്യയുടെ കുറവ്, വധക്ഷേപം = (വർഗ്ഗത്തിൽ നിന്നു) ഗുണിതം കുറച്ചത്, തത്പദോത്തരം = അതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമാണ്, അവ്യക്തരാശയഃ = അവ്യക്തരാശികളുടെ, വർഗ്ഗിതാ = വർഗ്ഗം കണ്ടത്, ക്ഷേപവർജ്ജിതാ = ക്ഷേപം കുറച്ചത്.

സാരം

(അവ്യക്ത സംഖ്യകളുടെ) വർഗ്ഗത്തിൽ നിന്നു സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം കൊണ്ട് ഗുണിതങ്ങളും വർഗ്ഗങ്ങളുമായുള്ള വ്യത്യാസത്തെ ഹരിക്കുക. ഹരണഫലത്തിന്റെ മൂലമാണ് അവ്യക്തരാശികളുടെ വ്യത്യാസം അവ്യക്ത രാശികളുടെ വർഗ്ഗത്തിൽ നിന്നും വ്യത്യാസം കുറച്ച് സംഖ്യകൾ കാണുക.

മുൻ ഉദാഹരണത്തിൽ സംഖ്യകൾ അടുത്ത വർഗ്ഗസംഖ്യകളുമായുള്ള വ്യത്യാസം **2** എന്നും അവ രണ്ടു വീതം ഗുണിച്ചവയ്ക്ക് അടുത്ത വർഗ്ഗസംഖ്യകളുമായുള്ള വ്യത്യാസം **18** എന്നും തന്നിരിക്കുന്നു. അവയുടെ ഹരണഫലം **9** ആയതിനാൽ അതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലമായ **3** ആണ്, വർഗ്ഗമൂലങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം. സംഖ്യകൾ $x, (x+3)$, $(x+6)(x+9)$ എന്നിവയായി സങ്കല്പിച്ച്

$a_1 = x^2 - 2$, $a_2 = (x+3)^2 - 2$, $a_3 = (x+6)^2 - 2$, $a_4 = (x+9)^2 - 2$, എന്നിങ്ങനെ കാണാം.

ഉദാഹരണം 70

ക്ഷേത്രതിഥിനഖൈഃ തുല്യേ ദോഃ കോടീ തത്ര കാ ശ്രുതിഃ
ഉപപത്തിഃ ച രൂഢസ്യ ഗണിതസ്യാ സ്യ കഥ്യതാം

അർത്ഥം

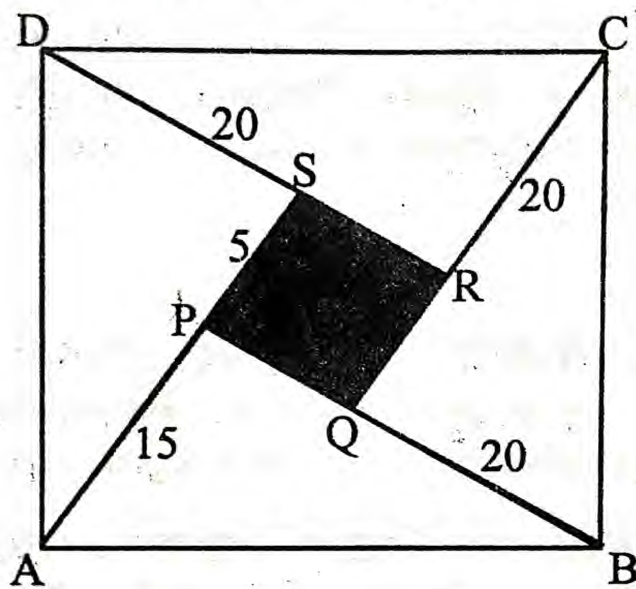
തിഥി = **15**, നഖം = **20**, ദോഃകോടി = ബാഹുകോടി (ത്രിഭുജത്തിന്റെ **2** വശങ്ങൾ), ശ്രുതി = കർണ്ണം, ഉപപത്തി = നിയമം

സാരം

ഒരു ത്രിഭുജക്ഷേത്രത്തിൽ ഭുജകോടികൾ യഥാക്രമം **15, 20** എന്നിവയാണ് അതിന്റെ കർണ്ണം എത്ര? ഈ ഗണിത നിയമത്തിന്റെ തെളിവ് പറയുക.

ഭുജം = **15**, കോടി = **20**, കർണ്ണം $= \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$

(Right angled Triangle) മട്ടത്രികോണത്തിൽ ഭുജവർഗ്ഗം + കോടി വർഗ്ഗം = കർണ്ണവർഗ്ഗം എന്നതാണ് നിയമം. ഇത് ഇപ്രകാരം തെളിയിക്കാം. ഭുജവും കോടിയും വശങ്ങളും കർണ്ണം പാദവുമായ 4 ത്രിഭുജങ്ങൾ ഭുജകോടികളുടെ അന്തരം വശമായ ഒരു ചതുരത്തിനോടു നാലു ഭാഗത്തും ചിത്രത്തിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പ്രകാരം സ്ഥാപിക്കുക.



ചിത്രം 9

ഇവിടെ **APB, BQC, CRD, DSA** എന്നിവ നാലു തുല്യ ത്രിഭുജങ്ങളാണ്.

AP = BQ = CR = DS = 15

PB = DC = RD = SA = 20

PQRS -5 വശമായ ചതുരശ്രമാണ്.

4 ത്രിഭുജങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണം $= 4 \times 15 \times \frac{20}{2} = 600$

PQRS എന്ന ചതുരശ്രത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം **= 25**

ABCD യുടെ വിസ്തീർണ്ണം **= 600 + 25 = 625**

ABCD ഒരു ചതുരശ്രമാണ്. അതിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം $= \sqrt{625} = 25$

15, 20 എന്ന ഭുജകോടികളുള്ള ത്രിഭുജക്ഷേത്രത്തിന്റെ കർണ്ണത്തിന്റെ നീളം **= 25** എന്നു ലഭിക്കുന്നു.

ഇതിന് ബീജഗണിത സിദ്ധാന്തപ്രകാരമുള്ള തെളിവ് അടുത്ത കരണസൂത്രത്തിൽ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്.

കരണസൂത്രം 47

ദോഃ കോട്യന്തര വർഗ്ഗേണ ദ്വിഘ്നോ ഘാതഃ സമന്വിതഃ
വർഗ്ഗയോഗ സമഃ സ സ്യാൽ ദ്വയോരവ്യക്തയോർ യഥാ

അർത്ഥം

ദോഃ കോട്യന്തര വർഗ്ഗം = ഭുജകോടികളുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ വർഗ്ഗം, ദ്വിഘ്നോ ഘാത = ഗുണിതങ്ങളുടെ ഇരട്ടി, വർഗ്ഗയോഗ സമഃ = (ഭുജകോടികളുടെ) വർഗ്ഗങ്ങൾ കൂട്ടിയതിനു തുല്യമാണ്, ദ്വയോരവ്യക്തയോർ യഥാ = രണ്ടു അവ്യക്തസംഖ്യകളെന്നപോലെ.

സാരം

ഒരു മട്ടത്രിഭുജത്തിന്റെ ഭുജവും കോടിയും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസത്തിന്റെ വർഗ്ഗവും അവയുടെ ഗുണിതത്തിന്റെ ഇരട്ടിയും ചേർത്തതു സംഖ്യകളിലെന്നപോലെ അവയുടെ വർഗ്ഗയോഗമാകുന്നു.

x, y എന്ന ഭുജ കോടികളുടെ അന്തര വർഗ്ഗം = $(x-y)^2$

അവയുടെ ഗുണിതത്തിന്റെ ഇരട്ടി = $2xy$

വർഗ്ഗയോഗം = $x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy$

ഈ ബീജഗണിതവാക്യമാണ് ഇവിടെ സൂചിപ്പിച്ചത്.

ഉദാഹരണം 71

ഭുജാത് ത്ര്യൂനാൽ പദം വ്യേകം കോടികർണ്ണാന്തരം സഖേ
യത്ര തത്ര വദ ക്ഷേത്രേ ദോഃ കോടിഃ ശ്രവണാൻ മമ.

അർത്ഥം

ഭുജാത് ത്ര്യൂനം = ഭുജത്തിൽ നിന്നു 3 കുറച്ചത്, പദം = വർഗ്ഗമൂലം, വ്യേകം = ഒന്നു കുറച്ചത്, ശ്രവണം = കർണ്ണം

സാരം

ഭുജത്തിൽ നിന്നു മൂന്നു കുറച്ചതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലത്തിൽ നിന്നും ഒന്നു കുറച്ചത്, കർണ്ണവും കോടിയുമായുള്ള വ്യത്യാസമാകുന്നു. ആ ത്രിഭുജ ക്ഷേത്രത്തിലെ ഭുജ, കോടി, കർണ്ണം എന്നിവ കാണുക.

ത്രിഭുജത്തിലെ ഭുജ = x എന്നും കർണ്ണവും കോടിയും തമ്മിലുള്ള അന്തരം = y എന്നും സങ്കല്പിക്കുക.

$\sqrt{x-3}-1=y$

അഥവാ $x-3=(y+1)^2$

$x=(y+1)^2+3$

ഇവിടെ കർണ്ണവും കോടിയും തമ്മിലുള്ള അന്തരം 1, 2, 3 എന്നിങ്ങനെ മൂല്യങ്ങൾ സങ്കല്പിക്കുക.

$y = 1$ ആയാൽ $x = 7$

കർണ്ണം^{2} - കോടി^{2} $= x^2 = 49 =$ (കർണ്ണം + കോടി) (കർണ്ണം - കോടി)

ഇതിൽ നിന്നും കർണ്ണം + കോടി $=\frac{49}{1}=49$

കർണ്ണം - കോടി $= 1$

കർണ്ണം $=\frac{49+1}{2}=25$ കോടി $=\frac{49-1}{2}=24$ ഭുജ $= 7$ എന്നു ഉത്തരമാകും.

അതുപോലെ $y = 2$ ആയാൽ $x = 12$ (ഭുജ)

കർണ്ണം + കോടി $=\frac{144}{2}=72$ അതിൽ നിന്നും

കർണ്ണം $=\frac{72+2}{2}=37$, കോടി $=\frac{72-2}{2}=35$

$y = 4$ ആയാൽ $x = 28$.

കർണ്ണം + കോടി $=\frac{28^2}{4}=196$

കർണ്ണം $=\frac{196+4}{2}=100$ കോടി $=\frac{196-4}{2}=96$

അതുപോലെ $y = 8$ ആയാൽ $x = 84$

കർണ്ണം + കോടി $=\frac{84^2}{8}=882$

കർണ്ണം $=\frac{882+8}{2}=445$ കോടി $=\frac{882-8}{2}=437$

ഇപ്രകാരം അനേകം മൂല്യങ്ങൾ കാണാൻ സാധിക്കും.

കരണസൂത്രം 48

വർഗ്ഗയോഗസ്യ യദ് രാശ്യോർ യുതി വർഗ്ഗസ്യ ചാന്തരം ദ്വിഘ്ന ഘാതസമാനം സ്യാത് ദ്വയോരവ്യക്തയോർ യഥാ ചതുർഗുണസ്യ ഘാതസ്യ യുതിവർഗ്ഗസ്യ ചാന്തരം രാശ്യന്തരകൃതേഃ തുല്യം ദ്വയോരവ്യക്തയോർ യഥാ

അർത്ഥം

യുതി വർഗ്ഗം = സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ വർഗ്ഗം, ചാന്തരം = ച അന്തരം, രാശ്യന്തരകൃതി = സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ വർഗ്ഗം

സാരം

രണ്ടു അവ്യക്തസംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയും അവയുടെ തുകയുടെ വർഗ്ഗവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം അവയുടെ ഗുണിതത്തിന്റെ രണ്ടിരട്ടിക്കു തുല്യമാകുന്നു.

രണ്ടുസംഖ്യകളുടെ ഗുണിതത്തിന്റെ നാലിരട്ടിയും അവയുടെ തുകയുടെ വർഗ്ഗവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം അവയുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തിന് തുല്യമാകുന്നു.

അതായത് x, y എന്നീ രണ്ടു സംഖ്യകളിൽ

$(x+y)^2 - (x^2+y^2) = 2xy$ എന്നും

$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$ എന്നുമുള്ള രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളാണ് മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.

ഉദാഹരണം 72

ചത്വാരിംശത് യുതിർ യേഷാം ദോഃ കോടി ശ്രവണാൻ വദ
ഭുജകോടി വധോ യേഷു ശതം വിംശതി സംയുതം

അർത്ഥം

ചത്വാരിംശത് = 40, ഭുജകോടിവധം = ഭുജകോടികളുടെ ഗുണിതം, ശതം വിംശതിസംയുതം = 120

സാരം

ഏതൊരു ത്രിഭുജത്തിൽ ഭുജ, കോടി, കർണ്ണം എന്നിവയുടെ തുക 40, ഭുജകോടികളുടെ ഗുണനഫലം = 120 എന്നിങ്ങനെയായാൽ അതിന്റെ ഭുജകോടി കർണ്ണങ്ങൾ എത്രയെന്നു പറയുക.

ഭുജം $= x$ കോടി $= y$ എന്നും സങ്കല്പിക്കുക.

കർണ്ണം $=\sqrt{x^2+y^2}$ എന്നാകും

$$x+y+\sqrt{x^2+y^2}=40, xy=120$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=40-(x+y)$$

$$x^2+y^2=1600-80(x+y)+(x+y)^2$$

$$=(x+y)^2-2xy=(x+y)^2-240$$

$$\therefore 1600-80(x+y)=-240$$

$80(x+y)=1840$ അതായത് $x+y=23$

$$(x-y)^2 = (x+y)^2-4xy=23^2-4\times120=529-480$$

$$=49$$

$$\therefore x-y=7$$

$$x+y=23$$

$$2x=30 \quad \therefore x=15$$

$$2y=16 \quad y=8$$

കർണ്ണം $=\sqrt{15^2+8^2}=17$

ഉദാഹരണം 73

യോഗോ ദോഃ കോടികർണ്ണാനാം ഷഡ്പഞ്ചാശത് വധഃ തഥാ
ഷഡ്ശതി സപ്തഭിഃ ക്ഷുണ്ണാ യേഷാം താൻ മേ പൃഥക് വദ

അർത്ഥം

ഷഡ്പഞ്ചാശത് = **56**, വധഃ = ഗുണിതം, ഷഡ്ശതി = **600**, സപ്തഭിഃ = **7**, ക്ഷുണ്ണാ = ഗുണിച്ചത്, യേഷാം = ഇവയുടെ.

സാരം

ഭുജ, കോടി, കർണ്ണം ഇവയുടെ തുക **56**, അവയുടെ ഗുണിതം **600** നെ **7** കൊണ്ടു ഗുണിച്ച സംഖ്യയുമായാൽ അവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ വെവ്വേറെ പറയുക.

ഭുജം $=x$, കോടി $=y$ എന്നും സങ്കല്പിച്ചാൽ

കർണ്ണം $=\sqrt{x^2+y^2}$ എന്നാകും.

$$x+y+\sqrt{x^2+y^2}=56$$

$$xy\sqrt{x^2+y^2}=600\times 7=4200$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=56-(x+y)=\sqrt{(x+y)^2-2xy}$$

$$\therefore 56^2+(x+y)^2-112(x+y)=(x+y)^2-2xy$$

$$\therefore 56^2=112(x+y)-2xy$$

$$\therefore xy=\frac{112(x+y)-56^2}{2}$$

$$=56(x+y-28)=\frac{4200}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{4200}{56-(x+y)}$$

$$\therefore \frac{4200}{56}=75=[(x+y)-28][56-(x+y)]$$

$$-(x+y)^2+84(x+y)-28\times 56$$

$$\therefore (x+y)^2-84(x+y)=-28\times 56-75=-1643$$

$$(x+y)^2-84(x+y)+42^2=1764-1643=121$$

അതായത് $(x+y-42)^2=11^2$

$$\therefore x+y-42=\pm 11$$

അഥവാ $x+y=42\pm 11=53,$ അഥവാ $42-11=31$

ഇവയിൽ സ്വീകാര്യമായത് $x+y=31$ എന്നതാണ്

$$\sqrt{x^2+y^2}=56-31=25$$

$$xy = \frac{4200}{25} = 168$$

$$(x-y)^2 = 31^2 - 4\times168 = 289$$

$$x - y = 17$$

$$x + y = 31$$

ഇതിൽ നിന്നും $x = \frac{17+31}{2} = 24, \quad y = \frac{31-17}{2} = 17$

ത്രിഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 7, 24, 25

അദ്ധ്യായം 9

അനേകവർണ്ണ സമീകരണം

ഒന്നിലധികം അവ്യക്തഘടകങ്ങളുള്ള സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്നും അവ്യക്ത സംഖ്യകൾ കാണാനുള്ള മാർഗ്ഗം ഇവിടെ വിവരിക്കുന്നു.

കരണസൂത്രം 49

ആദ്യം വർണ്ണം ശോധയേദ് അന്യപക്ഷാദ്
അന്യാൻ രൂപാണ്യന്യതഃ ചാദ്യഭക്തേ.
പക്ഷേ*f*ന്യസ്മിൻ ആദ്യ വർണ്ണോന്മിതിഃ സ്യാൽ
വർണ്ണസ്യൈകസ്യോന്മിതീനാം ബഹുത്വേ
സമീകൃത ഛേദഗമേതുതാഭ്യഃ
തദന്യവർണ്ണോന്മിതയഃ പ്രസാധ്യഃ
അന്ത്യോന്മിതൌ കുട്ടവിധേർ ഗുണാപ്തി
തേ ഭാജ്യതദ് ഭാജക വർണ്ണമാനേ
അന്യേ*f*പി ഭാജ്യേ യദി സന്തി വർണ്ണാ
തന്മാനമിഷ്ടം പരികൽപ്യ സാധ്യേ
വിലോമകോത്ഥാപനതോ*f*ന്യ വർണ്ണ
മാനാനി ഭിന്നം യദി മാനമേവം
ഭൂയഃ കാര്യഃ കുട്ടകോ*f*ത്രാന്ത്യ വർണ്ണം
തേനോത്ഥാപ്യോത്ഥാപയേദ് വ്യസ്തമാദ്യാത്

അർത്ഥം

ആദ്യം വർണ്ണം = ആദ്യ അവ്യക്തഘടകം, അന്യപക്ഷാത് = മറുവശത്തു നിന്ന്, അന്യാൻ രൂപാണി = മറ്റു ഘടകങ്ങളും സംഖ്യയും, അന്യതഃ = മറുവശത്ത്, ആദ്യഭക്തേ = ആദ്യ ഘടകത്തിന്റെ ഗുണകാരം കൊണ്ടു ഹരിക്കുക, ആദ്യവർണ്ണോന്മിതി = ആദ്യഘടകത്തിന്റെ മൂല്യം (ഉന്മിതി), വർണ്ണസ്യ ഏകസ്യ ഉന്മിതിനാം = ഒരു ഘടകത്തിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ, ബഹുത്വേ = കൂടുതലുണ്ടെങ്കിൽ, സമീകൃതച്ഛേദഗം = സമീകരണ വിഭജനത്തിലൂടെ ഉണ്ടാകുന്ന, അന്ത്യോന്മിതി = അന്ത്യ ഘടകത്തിന്റെ മൂല്യം, കുട്ടവിധേർ = കുട്ടക വിധിയിൽ നിന്നും, അന്യേപി വർണ്ണാ = മറ്റു അവ്യക്തഘടകങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ, തന്മാനം = ഇഷ്ടം, പരികല്പ്യാ= അതിന് ഇഷ്ടമുള്ള മൂല്യം

സങ്കല്പിച്ച്, വിലോമകോത്ഥാപനം = വിപരീത ഗണിതക്രിയ, യദി മാനം ഭിന്നം = മൂല്യം ഭിന്ന സംഖ്യയാണെങ്കിൽ, ഭുയ = വീണ്ടും, കാര്യ = ചെയ്ത്, ഉത്ഥാപ്യ = പകരം ചേർത്ത് ക്രിയചെയതത്, വ്യസ്തമാദ്യാത് = വ്യസ്തക്രിയ മുതലുള്ളവയിൽ നിന്നും.

സാരം

സമവാക്യത്തിൽ ആദ്യഘടകം ഒരു വശത്തും (അന്യപക്ഷത്തു നിന്നും ഒഴിവാക്കി) മറ്റു ഘടകങ്ങൾ (സംഖ്യകൾ ഉൾപ്പെടെ) മറുവശത്തും വരുത്തുക.

ആദ്യഘടകത്തിന്റെ **(coefficient)** ഗുണകാരം കൊണ്ട് അന്യ പക്ഷഘടകങ്ങളെ ഹരിച്ച് അതിന്റെ മൂല്യം (ഉന്മിതി) കാണുക. ഒന്നിലധികം സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്നും ആദ്യഘടകത്തിന് അധികം ഉന്മിതികൾ ലഭ്യമായാൽ അവ ഉപയോഗിച്ച് സമീകരണത്തിലൂടെ അന്യ ഘടകങ്ങളുടെ മൂല്യം കാണാൻ കഴിയും.

അന്ത്യ ഉന്മിതിയിൽ **(expression)** ഒരു അവ്യക്തഘടകമുണ്ടെങ്കിൽ കുട്ടകവിധിയിലൂടെ അതിന്റെ ഗുണലബ്ധികൾ നിർണ്ണയിക്കുക.

അന്ത്യ ഉന്മിതിയിൽ ഒന്നിലധികം അവ്യക്തഘടകങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ അവക്ക് ഇഷ്ടമൂല്യങ്ങൾ സങ്കല്പിച്ച് കുട്ടകം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക. അവ ഉപയോഗിച്ച് അന്യ ഘടകങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ വ്യസ്തസ്ത ക്രിയയിലൂടെ കാണാൻ കഴിയും. മൂല്യങ്ങൾ ഭിന്നസംഖ്യകളായാൽ വീണ്ടും കുട്ടകക്രിയ ആവർത്തിച്ച് (അന്ത്യ ഘടകത്തിൽ) വ്യസ്ത കർമ്മത്തിലൂടെയും മറ്റും അവ്യക്ത ഘടകങ്ങൾ കാണണം.

x, y, z എന്നീ അവ്യക്തഘടകങ്ങളുള്ള സമവാക്യങ്ങൾ

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$

ഇതിൽ നിന്നും $x=\frac{-b_1}{a_1}y-\frac{c_1}{a_1}z-\frac{d_1}{a_1}$ എന്ന ഉന്മിതി ഉണ്ടാകും

മറ്റൊരു സമീകരണം $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ എന്നായാൽ

$x=\frac{-b_2}{a_2}y-\frac{c_2}{a_2}z-\frac{d_2}{a_2}$ എന്നും മൂല്യം ലഭിക്കും.

ഇപ്രകാരം xന് ഒന്നിലധികം മൂല്യങ്ങൾ ലഭിച്ചാൽ അവയുടെ സമീകരണത്തിൽ നിന്നും മറ്റു ഘടകങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ കണക്കാക്കാവുന്നതാണ്.

അവ്യക്തഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണത്തോളം തന്നെ വ്യത്യസ്ത സമവാക്യങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ മാത്രമേ അവയുടെ മൂല്യം കൃത്യമായി കാണാൻ സാധിക്കൂ.

സമവാക്യങ്ങളുടെ എണ്ണം അവ്യക്തഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണത്തേക്കാൾ കുറവായാൽ ലഘൂകരണത്തിന്റെ അന്ത്യത്തിൽ കിട്ടുന്ന സമവാക്യത്തിൽ ഒന്നിലധികം അവ്യക്തഘടകങ്ങളുണ്ടാകും. അവ കുട്ടകരൂപത്തിൽ കണക്കാക്കി. മൂല്യനിർണ്ണയം ചെയ്യണം. അപ്രകാരം ലഭിക്കുന്ന ഗുണലബ്ധികൾ ആ അവ്യക്ത ഘടകങ്ങളുടെ മൂല്യമായി പരിഗണിച്ച് അവ ഉപയോഗിച്ച് മറ്റു ഘടകങ്ങളുടെ മൂല്യം കണക്കാക്കുക. അവയുടെ മൂല്യം ഭിന്ന സംഖ്യാരൂപത്തിലായാൽ കുട്ടകത്തിന്റെ മറ്റു മൂല്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ക്രിയ ആവർത്തിക്കണം.

ഉദാഹരണം 74

അശ്വാഃ പഞ്ചഗുണാംഗമംഗലമിതാ
യേഷാം ചതുർണ്ണാം ധനാ
ന്യുഷ്ടാഃ ച ദ്വിമുനി ശ്രുതിക്ഷിതിമിതാ
അഷ്ട ദ്വിഭൂ പാവകാഃ
തേഷാം അശ്വതരാ വൃഷാ മുനിമഹീ
നേത്രേന്ദു സംഖ്യാഃ ക്രമാൽ
സർവ്വേ തുല്യധനാഃ ച തേ വദ സപ –
ദ്യശ്വാദി മൗല്യാനി മേ

അർത്ഥം

അശ്വം = കുതിര, പഞ്ച = **5**, ഗുണം = **3**, അംഗം = **6**, മംഗലം = **8**, യേഷാം ചതുർണ്ണാം ധനം = ഈ നാലുപേരുടെ ധനം, ഉഷ്ടം = ഒട്ടകം, ദ്വി = **2**, മുനി = **7**, ശ്രുതി = **4**, ക്ഷിതി = ഭൂമി = **1**, അഷ്ടം = **8**, ഭൂ = ഭൂമി = **1**, പാവകൻ = അഗ്നി = **3**, അശ്വതരം = കഴുത, വൃഷാ = കാള, നേത്രം = **2**, ഇന്ദു = **1**

സാരം

ഈ നാലുപേർക്ക് ധനമായി യഥാക്രമം **5, 3, 6, 8** കുതിരകളും **2, 7, 4, 1** എന്ന ക്രമത്തിൽ ഒട്ടകങ്ങളും **8, 2, 1, 3** എന്ന ക്രമത്തിൽ കഴുതകളും **7, 1, 2, 1** എന്ന ക്രമത്തിൽ കാളകളുമുണ്ട്.

അവരെല്ലാം തുല്യധനവാന്മാരാണെങ്കിൽ കുതിരകളുടെയും മറ്റും മൂല്യം എത്രയെന്ന് എന്നോട് വേഗം പറഞ്ഞാലും.

A, B, C, D എന്ന നാലാൾക്ക് ധനമായുള്ള മൃഗങ്ങളുടെ മൂല്യം താഴെ കൊടുക്കുന്നു. ഒരു കുതിരയുടെ വില **a** എന്നും ഒരു ഒട്ടകത്തിന്റെ വില **b** എന്നും ഒരു കഴുതയുടെ വില **c** എന്നും ഒരു കാളയുടെ വില **d** എന്നും സങ്കല്പിക്കുക.

A യുടെ ധനം $=5a+2b+8c+7d$

B യുടെ ധനം $=3a+7b+2c+d$

C യുടെ ധനം $=6a+4b+c+2d$

D യുടെ ധനം $=8a+b+3c+d$

B യുടെയും **D** യുടെയും ധനം തുല്യമായതിനാൽ

$3a+7b+2c+d=8a+b+3c+d$

അതായത് $5a=6b-c$

B, C എന്നിവയുടെ ധനം തുല്യമായതിനാൽ

$3a+7b+2c+d=6a+4b+c+2d \therefore 3a-3b-c+d=0$

ഇതിൽ നിന്നും $d=3b-3a+c=3b-3a+6b-5a=9b-8a$

A യുടെയും **B** യുടെയും ധനം തുല്യമാകയാൽ

$\therefore 5a+2b+8c+7d=3a+7b+2c+d$

അതായത് $2a-5b+6c+6d=0$

C, D എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ

$2a-5b+36b-30a+54b-48a=0$

$85b-76a=0 \therefore a=\frac{85}{76}b \quad c=6b-5a= \quad 6b-\frac{85\times 5}{76}b=\frac{31}{76}b$

$d=9b-8a=9b-\frac{85\times 8}{76}b=\frac{4}{76}b$

ഇവിടെ **b** യുടെ ഒരു മൂല്യം സങ്കല്പിക്കാം **b = 76** എന്നാണ് സ്വീകാര്യമെങ്കിൽ

a (കുതിരയുടെ വില) = 85 രൂപ

b (ഒട്ടകത്തിന്റെ വില) = 76 രൂപ

c (കഴുതയുടെ വില) = 31 രൂപ

d (കാളയുടെ വില) = 4 രൂപ

ഉദാഹരണം 75

ത്രിഭിഃ പാരാവതാഃ പഞ്ച, പഞ്ചഭിഃ സപ്ത സാരസാഃ
സപ്തഭിഃ നവ ഹംസാഃ ച, നവഭിഃ ബർഹിണഃ ത്രയഃ
ദ്രമ്മേരവാപ്യതേ, ദ്രമ്മ ശതേന ശതമാനയ
ഏഷാം പാരാവതാദീനാം വിനോദാർധേ മഹീപതേ

അർത്ഥം

ത്രിഭിഃ = 3, പാരാവതം = പ്രാവ്, സാരസം = കൊക്ക്, ഹംസം = അരയന്നം, ബർഹിണം = മയിൽ, ദ്രമ്മശതേന ശതം ആനയ = 100 ദ്രമ്മം കൊണ്ട് 100 എണ്ണം കൊണ്ടു വരിക.

സാരം

മൂന്നു ദ്രമ്മത്തിന് 5 പ്രാവുകൾ, 5 ദ്രമ്മത്തിന് 7 കൊക്കുകൾ, 7 ദ്രമ്മത്തിന് 9 ഹംസങ്ങൾ, 9 ദ്രമ്മത്തിന് 3 മയിലുകൾ എന്നിവ ലഭ്യമാണ്. 100 ദ്രമ്മം കൊണ്ട് ഈ പ്രാവു മുതലായവ 100 എണ്ണം രാജാവിന്റെ വിനോദത്തിനു വേണ്ടി കൊണ്ടുവരിക.

പ്രാവുകളുടെ എണ്ണം $5x$ എന്നു സങ്കല്പിക്കുക മൂല്യം $= 3x$

കൊക്കുകളുടെ എണ്ണം 7y എന്നു സങ്കല്പിക്കുക മൂല്യം = 5y

ഹംസങ്ങളുടെ എണ്ണം 9z എന്നു സങ്കല്പിക്കുക മൂല്യം = 7z

മയിലുകളുടെ എണ്ണം 3p എന്നു സങ്കല്പിക്കുക മൂല്യം = 9p

ആകെ പക്ഷികൾ $= 5x + 7y + 9z + 3p = 100$ 1

മൂല്യം $= 3x + 5y + 7z + 9p = 100$ 2

ഇതിൽ നിന്നും $5x = 100 - 7y - 9z - 3p$

$$x = \frac{100 - 7y - 9z - 3p}{5}$$

മൂല്യത്തിൽ നിന്നും $3x = 100 - 5y - 7z - 9p$

$$x = \frac{100 - 5y - 7z - 9p}{3}$$

$$\frac{100 - 7y - 9z - 3p}{5} = \frac{100 - 5y - 7z - 9p}{3}$$

കുറുകെ ഗുണിക്കുമ്പോൾ

$$300 - 21y - 27z - 9p = 500 - 25y - 35z - 45p$$

ലഘൂകരിക്കുക.

$4y + 8z + 36p = 200$

$y + 2z + 9p = 50$ 3

സമവാക്യങ്ങൾ 1,2 എന്നിവയിൽ നിന്നും

$5x = 100 - 7y - 9z - 3p$ എന്നും

$3x = 100 - 5y - 7z - 9p$ എന്നും ലഭിച്ചു അവയുടെ വ്യത്യാസം

$2x = -2y - 2z + 6p$ അതായത്

$x = -y - z + 3p$ എന്നും ലഭിക്കുന്നു.

അഥവാ $y + z - 3p = -x$

3- ൽ നിന്നും $y + 2z + 9p = 50$

അതായത് $z + 12p = 50 + x ; y = 50 - 2z - 9p$

ഇവിടെ x, y, z, p എന്ന 4 അവ്യക്ത ഘടകങ്ങളുള്ള രണ്ടു സമവാക്യങ്ങൾ മാത്രമാണുള്ളത്. അതിനാൽ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു അവ്യക്ത ഘടകങ്ങൾക്കു മൂല്യം സങ്കല്പിക്കണം. x, p എന്നി വയ്ക്ക്.

$x = 1, p = 4$ എന്നു സങ്കല്പിക്കുക. അതിൽ നിന്നും $z = 3$, $y = 8$ എന്ന് ഉത്തരമാകും

$x = 2, p = 4$, ആയാൽ $z = 4, y = 6$ എന്നും

$x = 3, p = 4$, ആയാൽ $z = 5, y = 4$, എന്നും വിവിധ മൂല്യങ്ങൾ കാണാം

$x = 1, y = 8, z = 3, p = 4$ ആയാൽ

	പ്രാവുകൾ	കൊക്ക്	ഹംസം	മയിൽ	ആകെ
എണ്ണം	5	56	27	12	100
മൂല്യം	3	40	21	36	100
	($x = 2$	$y = 6$	$z = 4$	$p = 4$)	ആയാൽ
എണ്ണം	10	42	36	12	100
മൂല്യം	6	30	28	36	100

ഇപ്രകാരം വിവിധ രീതിയിൽ ഉത്തരം കാണാം.

ഉദാഹരണം 76

ഷഡ്ഭക്തഃ പഞ്ചാഗ്രഃ പഞ്ച വിഭക്തോ ഭവേത് ചതുഷ്കാഗ്രഃ
ചതുരുദ്ധൃതഃ ത്രികാഗ്രോ ദ്വയഗ്രഃ ത്രിസമുദ്ധൃതഃ കഃ സ്യാൽ

അർത്ഥം

ഷഡ്ഭക്തഃ = 6 കൊണ്ടു ഹരിച്ചത്, പഞ്ചാഗ്രം = 5 ശിഷ്ടം, പഞ്ചവിഭക്തോ = 5 കൊണ്ട് ഹരിച്ചത്, ചതുഷ്കാഗ്രം = 4 ശിഷ്ടം, ചതുരുദ്ധൃതം = 4 കൊണ്ടു ഹരിച്ചത്, ത്രികാഗ്രം = 3 ശിഷ്ടം, ദ്വയഗ്രം = 2 ശിഷ്ടം, ത്രിസമുദ്ധൃതം = 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചത്

സാരം

ഏതു സംഖ്യയെ 6 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 5 ശിഷ്ടവും, 5 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 4 ശിഷ്ടവും 4 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 3 ശിഷ്ടവും, 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 2 ശിഷ്ടവുമാകുന്നു.

ഹാരകങ്ങൾ 6, 5, 4, 3 എന്നിവയാണ് അവയുടെ ലഘുതമസാധാരണഗുണിതം (LCM) കാണുക.

3) <u>6, 5, 4, 3</u>
2) <u>2, 5, 4, 1</u>
<u>1, 5, 2, 1</u>

ലസാഗു $= 3 \times 2 \times 1 \times 5 \times 2 \times 1 = 60$

ഓരോ ഹാരകത്തിനും അതിനേക്കാൾ 1 കുറവാണ് ശിഷ്ടം അതിനാൽ അവയുടെ ലസാഗുവിൽ നിന്നും ഒന്നു കുറച്ചതാണ് ഉത്തരം

സംഖ്യ = 60-1 = 59, 59 +60 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളും ഉത്തരമാകും.

അതായത് മറ്റു മൂല്യങ്ങൾ $60n + 59$, $n = 1, 2, 3$

ഉദാഹരണം 77

സ്യുഃ പഞ്ച സപ്ത നവഭിഃ ക്ഷുണ്ണേഷു ഹൃതേഷു കേഷു വിംശത്യാ
രൂപോത്തരാണി ശേഷാപി അവാപ്തയഃ ശേഷ സമാഃ

അർത്ഥം

പഞ്ച = 5, സപ്ത = 7, നവം = 9, ക്ഷുണ്ണേഷു = ഗുണിച്ചത്, ഹൃതേഷു = ഹരിച്ചത്, വിംശത്യാ = 20 കൊണ്ടു, രൂപോത്തരം = ഒന്നു വ്യത്യാസം, അവാപ്തം = ഹരണഫലം, ശേഷസമം = ശിഷ്ടത്തിനു തുല്യം

സാരം

ഏതു മൂന്നു സംഖ്യകളെ യഥാക്രമം 5, 7, 9 എന്നിവ കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് 20 കൊണ്ട് ഓരോന്നിനെയും ഹരിക്കുമ്പോൾ ഹരണഫലങ്ങൾ ഒന്നു വീതം കൂടുകയും അവ ശിഷ്ടങ്ങൾക്കു തുല്യമാവുകയും ചെയ്യും.

x, y, z എന്ന മൂന്നു സംഖ്യകളെ 5, 7, 9 എന്നിവകൊണ്ടു ഗുണിക്കുമ്പോൾ $5x$, 7y, 9z എന്നിവയാകും.

ഇവയെ 20 കൊണ്ടു ഹരിച്ചഫലങ്ങൾ ഒന്നു വീതംകൂടി വരുന്നു. അവ ശിഷ്ടങ്ങൾക്കും തുല്യമാണ്.

$\frac{5x}{20}=a$ ശിഷ്ടം a അതായത് $5x$ = 20a + a = 21a

$\frac{7y}{20}=a+1$ ശിഷ്ടം a+1 അതായത് 7y = 21(a+1)

$\frac{9z}{20}=a+2$ ശിഷ്ടം a+2 അതായത് 9z = 21(a+2)

$$x=\frac{21}{5}a\ ,\quad y=\frac{21}{7}(a+1),\quad z=\frac{21}{9}(a+2)$$

അഥവാ $x=\frac{21}{5}a,\quad y=3(a+1),\quad z=\frac{7}{3}(a+2)$

x, y, z പൂർണ്ണസംഖ്യകളാകാൻ a, 5 ന്റെ ഗുണിതവും (a+2) 3 ന്റെ ഗുണിതവുമാകണം. അതായത് a = 10 എന്ന ഉത്തരമാകും.

സംഖ്യകൾ $x = 42, y = 33, z = 28$

$\frac{5x}{20} = \frac{5 \times 42}{20} = \frac{210}{20}$ ഹരണഫലം 10 ശിഷ്ടം 10

$\frac{7y}{20} = \frac{7 \times 33}{20} = \frac{231}{20}$ ഹരണഫലം 11 ശിഷ്ടം 11

$\frac{9 \times z}{20} = \frac{9 \times 28}{20} = \frac{252}{20}$ ഹരണഫലം 12 ശിഷ്ടം 12

ഉദാഹരണം 78

ഏകാഗ്രോ ദ്വിഹൃതഃകഃസ്യാൽ, ദ്വികാഗ്രഃ ത്രിസമൃദ്ധൃതഃ
ത്രികാഗ്രഃ പഞ്ചഭിർഭക്തഃ തദ് വദേവ ഹി ലബ്ധയഃ

അർത്ഥം

ഏകാഗ്രം = 1 ശിഷ്ടം, ദ്വിഹൃതഃ = 2 കൊണ്ടു ഹരിച്ചത്, ദ്വികാഗ്രം = 2 ശിഷ്ടം, ത്രിസമൃദ്ധൃതം = 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചത്, ത്രികാഗ്രം = 3 ശിഷ്ടം, പഞ്ചഭിർഭക്തഃ = 5 കൊണ്ടു ഹരിച്ചത്, തദ്വദേവ ഹി ലബ്ധയഃ = ഹരണഫലങ്ങളും അപ്രകാരം തന്നെ.

സാരം

ഏതു സംഖ്യയെ 2 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം ഒന്നും, 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം രണ്ടും, 5 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം മൂന്നും അവയുടെ ഹരണഫലങ്ങളെ അപ്രകാരം തന്നെ യഥാക്രമം 2,3,5 എന്നിവകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 1,2,3, എന്ന ക്രമത്തിലുമാകുന്നു.

സംഖ്യ = x എന്നു സങ്കല്പിക്കുക

$\frac{x}{2}$ = ഹരണഫലം m_1 - ശിഷ്ടം = 1 അതായത് $x = 2m_1 + 1$

$\frac{m_1}{2}$ = ഹരണഫലം n_1 - ശിഷ്ടം = 1 അതായത് $m_1 = 2n_1 + 1$

അഥവാ $x = 2(2n_1 + 1) + 1 = 4n_1 + 3$

അതുപോലെ 3 കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ

$\frac{x}{3}$ ഹരണഫലം m_2 - ശിഷ്ടം = 2 $x = 3m_2 + 2$

$\frac{m_2}{3}$ = ഹരണഫലം n_2 - ശിഷ്ടം = 2 അതായത് $m_2 = 3n_2 + 2$

$x = 3(3n_2 + 2) + 2 = 9n_2 + 8$

5 കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ

$\frac{x}{5}$ = ഹരണഫലം m_3 - ശിഷ്ടം = 3 $x = 5m_3 + 3$

$\frac{m_3}{5}$ = ഹരണഫലം n_3 - ശിഷ്ടം = 3 അതായത് $m_3 = 5n_3 + 3$

$x = 25n_3 + 18 = 9n_2 + 8$ അതായത് $25n_3 + 10 = 9n_2$ അഥവാ $25n_3 + 1 = 9n_2$

ഈ കുട്ടകം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക

ഭാജ്യം	ഭാജകം	ഫലം	ശിഷ്ടം
25	9	2	7
9	7	1	2
7	2	3	1

2	2	2	110
1	1	40	40
3	30	30	
10	10		
0			

$110 \div 25$ ശിഷ്ടം = 10; $n_2 = 25 - 10 = 15$,

$40 \div 9$ ശിഷ്ടം= 4 $n_3 = 9 - 4 = 5$

$25n_3 + 10 = 9n_2$ എന്ന കുട്ടകത്തിൽ $n_3 = 5 + 9k$; $n_2 = 15 + 25k$ എന്ന ഉത്തരം

$x = 9(15 + 25k) + 8 = 143 + 225k$

അതുപോലെ $9n_2 + 8 = 4n_1 + 3$ എന്നതിൽ

$9n_2 + 5 = 4n_1$ അഥവാ $9n_2 + 5 = 4n_1$ എന്ന കുട്ടകമാകും.

ഇതിൽ $n_2 = 3 + 4k'$; $n_1 = 8 + 9k'$ എന്നു ഉത്തരം

$9n_2 + 8 = 35 + 36k'$

$x = 36k_1 + 35$ എന്ന മൂല്യം $= 143 + 225k$ $\quad k' = \frac{25k}{4} + 3$

ഇത് പൂർണ്ണസംഖ്യയാകാൻ k = 4, 8,12 etc.

x ന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞമൂല്യം = 143

മറ്റു മൂല്യങ്ങൾ 1043, 1943 etc.

$143 \div 2 =$ ഫലം $= 71$, ശിഷ്ടം$= 1$ $\quad 71 \div 2 =$ ഫലം $= 35$, ശിഷ്ടം $= 1$

$143 \div 3 =$ ഫലം $= 47$, ശിഷ്ടം$= 2$ $\quad 47 \div 3 =$ ഫലം $= 15$, ശിഷ്ടം $= 2$

$143 \div 5 =$ ഫലം $= 28$, ശിഷ്ടം$= 3$ $\quad 28 \div 5 =$ ഫലം $= 5$, ശിഷ്ടം $= 3$

ഉദാഹരണം 79

കൌ രാശീ വദ പഞ്ച ഷഡ്ക വിഹൃതാ
ഏക ദ്വികാഗ്രൌ യയോർ
ദ്വ്യഗ്രം ത്ര്യുദ്ധൃതമന്തരം നവ ഹൃതാ
പഞ്ചാഗ്രകാ സ്യാൽ യുതിഃ
ഘാതഃ സപ്തഹൃതാഃ ഷഡഗ്ര ഇതി തൗ
ഷഡ്കാഷ്ടകാഭ്യാം വിനാ
വിദ്വാൻ കുട്ടകവേദികുഞ്ജര ഘടാ
സംഘട്ട സിംഹോfസി ചേൽ

അർത്ഥം

കൌരാശി = ഏതുസംഖ്യകൾ, പഞ്ച ഷഡ്ക വിഹൃതാ = 5, 6 എന്നിവകൊണ്ട് (യഥാക്രമം) ഹരിച്ചാൽ, ഏക, ദ്വികാഗ്രം = 1, 2, എന്ന ശിഷ്ടങ്ങൾ, ദ്വ്യഗ്രം = 2 ശിഷ്ടം, ത്ര്യുദ്ധൃതം = 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചത്, അന്തരം = വ്യത്യാസം, നവഹൃതാ = 9 കൊണ്ടു ഹരിച്ചത്, പഞ്ചാഗ്രകം = 5 ശിഷ്ടം, യുതി = സംഖ്യകളുടെ തുക, ഘാതം = ഗുണനഫലം, സപ്തഹൃതാ = 7 കൊണ്ടു ഹരിച്ചത്, ഷഡ്ഗ്രം = 6 ശിഷ്ടം, ഷഡ്കാഷ്ടകാഭ്യാം വിനാ = 6, 8 എന്നിവകൂടാതെ

സാരം

ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളെ യഥാക്രമം 5,6 എന്നിവ കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം 1, 2 എന്നും അവയുടെ വ്യത്യാസത്തെ 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം രണ്ടും, അവയുടെ തുകയെ 9 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം അഞ്ചും അവയുടെ ഗുണിതത്തെ 7 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം ആറും ആകു ന്നുവോ അവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ 6,8 എന്നിവയെ കൂടാതെ മറ്റു സംഖ്യകൾ ഏതെന്ന് കുട്ടകക്രിയയിൽ സമർത്ഥനാണെങ്കിൽ പറഞ്ഞാലും.

നിർദ്ദിഷ്ട സംഖ്യകൾ x, y എന്നു സങ്കല്പിക്കുക തന്നിരിക്കുന്നത്

1) $\frac{x}{5}$ =ഹരണഫലം n എന്നും ശിഷ്ടം 1 എന്നും കരുതുക

$x = 5n + 1$

2) അതുപോലെ $\frac{y}{6}$ = ഹരണഫലം = n, ശിഷ്ടം = 2

അതായത് $y = 6n + 2$

3) $\frac{y-x}{3}$ = ഹരണഫലം k എന്നും ശിഷ്ടം 2 എന്നും കരുതുക

$y - x = 3k + 2$

$(6n + 2) - (5n + 1) = n + 1 = 3k + 2$

അതായത് $n = 3k + 1$

ഇതിൽ നിന്നും $x = 5(3k + 1) + 1 = 15k + 6$ എന്നും

$y = 6(3k + 1) + 2 = 18k + 8$ എന്നും ഉത്തരമാകും.

$\frac{x+y}{9}$ = ഹരണഫലം = m, ശിഷ്ടം = 5 എന്നായാൽ

$x + y = 9m + 5$

$15k + 6 + 18k + 8 = 33k + 14 = 9m + 5$

അതായത് $33k = 9m - 9$

അഥവാ $11k = 3m - 3$

ഇത് ഒരു കുട്ടകമായി കണക്കാക്കിയാൽ $k = 3 + 3p$

എന്നും xy =ഫലം=t ശിഷ്ടം=6

$m = 12 + 11p$ എന്നുമാകും

അതായത് $xy = 7t + 6$

$(15k + 6)(18k + 8)$ എന്നത് ഒരു ദ്വിഘാത വാക്യമാകും.

ഇവിടെ k ക്ക് ഒരു മൂല്യം സങ്കല്പിച്ച് ഒരു ഘടകം ഒഴിവാക്കാം.

$k = 3 + 3p$ ആകയാൽ അതിന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ മൂല്യം = 3 ആകുന്നു. മറ്റുള്ളവ 6, 9 തുടങ്ങിയവ.

$x = 15k + 6 = 15 \times 3 + 6 = 51$ എന്നു മൂല്യം എടുക്കാം.

$51 \times (18k + 8) = 7t + 6$

അതായത് $918k + 408 = 7t + 6$

അഥവാ $918k + 402 = 7t$

ഇതിനെ 7 കൊണ്ടു തക്ഷണം ചെയ്യുമ്പോൾ ശേഷിക്കുന്നത് $k + 3 = 7t$

ഇവിടെ k യുടെ ഏറ്റവും ചുരുങ്ങിയ മൂല്യം 4 എന്നാണ്. മറ്റുള്ളവ 11, 18

അതിൽ നിന്നും $y = 18 \times 4 + 8 = 80$

$x = 51, y = 80$ എന്ന ഉത്തരങ്ങൾ

$\frac{51}{5}$ = ഹരണഫലം = 10, ശിഷ്ടം = 1

$\frac{80}{6}$ = ഹരണഫലം = 13, ശിഷ്ടം = 2

$\frac{51+80}{9} = \frac{131}{9}$ = ഹരണഫലം = 14, ശിഷ്ടം = 5

$\frac{80-51}{3} = \frac{29}{3}$ = ഹരണഫലം = 9, ശിഷ്ടം = 2

$\frac{80 \times 51}{7} = \frac{4080}{7} =$ ഹരണഫലം $= 582$, ശിഷ്ടം $= 6$

മറ്റു മൂല്യങ്ങൾ $x = 96$, $y = 116$ അഥവാ 206 തുടങ്ങിയവ

ഉദാഹരണം 80

നവഭിഃ സപ്തഭിഃ ക്ഷുണ്ണാഃ കോ രാശിഃ ത്രിംശതാ ഹൃതാ
യദഗ്രൈക്യം ഫലൈക്യാഢ്യം ഭവേത് ഷഡ് വിംശതേർ മിതം

അർത്ഥം

നവഭി = 9, സപ്തഭി = 7, ത്രിംശത് = 30, അഗ്രൈക്യം = ശിഷ്ടങ്ങളുടെ തുക, ഫലൈക്യാഢ്യം = ഫലങ്ങളുടെ തുക, ഷഡ്വിംശതി = 26.

സാരം

ഏതു സംഖ്യയെ 9 കൊണ്ടും 7 കൊണ്ടും ഗുണിച്ച് 30 കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഹരണഫലങ്ങളും ശിഷ്ടങ്ങളും കൂട്ടിയത് 26 ആകുന്നു?

സംഖ്യ $= x$ എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

$\frac{9x}{30}$ ഹരണഫലം a ശിഷ്ടം p

$\frac{7x}{30}$ ഹരണഫലം b ശിഷ്ടം q

$a + b + p + q = 26$, x ന്റെ മൂല്യം കാണണം

$(p + q) = 26 - (a + b)$

$9x = 30a + p$

$7x = 30b + q$

$16x = 30(a + b) + 26 - (a + b) = 29(a + b) + 26$

$a + b = y$ എന്നു പകരം ഉപയോഗിച്ച്.

$29y + 26 = 16x$ അഥവാ $29y - 6 = 16x$ (32 കുറച്ചത്)

ഈ കുട്ടകത്തിൽ ഭാജ്യം $= 29y$, ഭാജകം$=16$

ഭാജ്യം	ഭാജകം	ഹരണഫലം	ശിഷ്ടം
29	16	1	13
16	13	1	3
13	3	4	1

കുട്ടക നിർദ്ധാരണം

Stage 1	Stage 2	Stage3	Stage 4
1	1	1	54
1	1	30	30
4	24	24	
6	6		
0			

$54 \div 29 -$ ശിഷ്ടം $= 25$

$30 \div 16 -$ ശിഷ്ടം $= 14$

$y = 14$; $x = 25$ എന്നിവ $29y - 6 = 16x$ എന്നതിന്റെ ഉത്തരമാണ്.

$29y + 26 = 16x$ എന്നതിന് $y = 14$, $x = 27$ എന്ന് ഉത്തരം

$\frac{27 \times 9}{30}$ ഹരണഫലം 8 ശിഷ്ടം 3

$\frac{27 \times 7}{30}$ ഹരണഫലം 6 ശിഷ്ടം 9

ഹരണഫലങ്ങളുടെ തുക $8 + 6 = 14$

ശിഷ്ടങ്ങളുടെ തുക $3 + 9 = 12$

ആകെ $= 26$

ഉദാഹരണം 81

കഃ ത്രിസപ്ത നവ ക്ഷുണ്ണോ രാശിഃ ത്രിംശത് വിഭാജിതഃ യദഗ്രൈക്യ മപി ത്രിംശത് ഉദ്ധൃതം ഏകാദശാഗ്രകം

അർത്ഥം

ത്രി = 3, സപ്ത = 7, നവ = 9, ത്രിംശത് = 30, അഗ്രൈക്യം = ശിഷ്ടങ്ങളുടെ തുക, ഉദ്ധൃതം = ഹരിച്ചത്, ഏകാദശാഗ്രകം = 11 ശിഷ്ടം.

സാരം

ഏതു സംഖ്യയെ 3, 7, 9 എന്നിവ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഓരോന്നിനെയും 30 കൊണ്ടു ഹരിച്ച ശിഷ്ടങ്ങളുടെ തുകയെ 30 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 11 ആകുന്നു, ആ സംഖ്യയേത്

സംഖ്യ $= x$ എന്നു കരുതുക.

$\frac{3x}{30} \rightarrow$ ശിഷ്ടം $= a$ $\frac{7x}{30} \rightarrow$ ശിഷ്ടം $= b$

$\frac{9x}{30} \rightarrow$ ശിഷ്ടം $= c$ $\frac{a+b+c}{30} \rightarrow$ ശിഷ്ടം $= 11$

$\frac{3x+7x+9x}{30} \rightarrow$ ഹരണഫലം + ശിഷ്ടം $= 11$

$19x = 30y + 11$ എന്ന കുട്ടകത്തിൽ ഭാജ്യം 30, ഭാജകം 19 എന്നു സങ്കല്പിക്കുക

ഭാജ്യം	ഭാജകം	ഹരണഫലം	ശിഷ്ടം
30	19	1	11
19	11	1	8
11	8	1	3
8	3	2	2
3	2	1	1

Step1	Step2	Step3	Step4	Step5	Step6
1	1	1	1	1	121
1	1	1	1	77	77
1	1	1	44	44	
2	2	33	33		
1	11	11			
11	11				
0					

$x = \frac{121}{30} \rightarrow$ ശിഷ്ടം =1 ഹരണഫലങ്ങൾ ഒറ്റയായതിനാൽ

x = 30 - 1 = 29 സംഖ്യ (x) = 29, 59 മുതലായവ

$\frac{29 \times 3}{30} \rightarrow$ ശിഷ്ടം =27 $\frac{29 \times 7}{30} \rightarrow$ ശിഷ്ടം =23

$\frac{29 \times 9}{30} \rightarrow$ ശിഷ്ടം =21

ശിഷ്ടം കൂട്ടിയത് 27+23+21=71 $\frac{71}{30}$ - ശിഷ്ടം = 11

ഉദാഹരണം 82

കഃ ത്രയോവിംശതി ക്ഷുണ്ണാഃ ഷഷ്ട്യാ*f*ശീത്യാ ഹൃതഃ പൃഥക്
യദഗ്രൈക്യം ശതം ദൃഷ്ടം കുട്ടകജ്ഞ വദാ*f*ശു തം

അർത്ഥം

ത്രയോവിംശതി = 23, ഷഷ്ടി = 60, അശീതി =80, ശതം = 100.

സാരം

ഏതു സംഖ്യയെ 23 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 60, 80 എന്നിവ കൊണ്ട് പ്രത്യേകം ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടങ്ങളുടെ തുക 100 ആകുന്നു. ഹേ കുട്ടകജ്ഞാ ആ സംഖ്യ വേഗം പറഞ്ഞാലും.

സംഖ്യ $= x$ എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

$$\frac{23x-R_1}{60}=u \quad \frac{23x-R_2}{80}=v$$

$R_1 + R_2 = 100$

$$x=\frac{60u+R_1}{23}=\frac{80v+R_2}{23}$$

ക്ഷേപകം രണ്ടു ഖണ്ഡങ്ങളാക്കണം ആ ഖണ്ഡങ്ങൾ u,v ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണകാരങ്ങളേക്കാൾ കുറവുമായിരിക്കണം.

$R_1 = 40$ എന്നും $R_2 = 60$ എന്നും സങ്കല്പിക്കുക.

അതായത് $60u+40=80v+60$

ഇതിൽ നിന്നും $u=\frac{80v+20}{60}=\frac{4v+1}{3}$

u പൂർണ്ണസംഖ്യയാകാൻ $v = 3m + 2$ എന്നും

$u = 4m + 3$ എന്നും മൂല്യങ്ങളാക്കാം.

$$x=\frac{80v+60}{23}=\frac{80\times(3m+2)+60}{23}=\frac{240m+220}{23}$$

ഇതിനു പൂർണ്ണസംഖ്യാമൂല്യം ലഭിക്കാൻ $m = 23n + 1$ എന്നു

സങ്കല്പിച്ചാൽ $x=\frac{240(23n+1)+220}{23}$

$$=\frac{240\times 23n}{23}+\frac{240+220}{23}=240n+20$$

$n = 0$ ആയാൽ $x = 20$

$n = 1,2,3$ എന്നിങ്ങനെ മറ്റു മൂല്യങ്ങൾ

$x = 260, 500, 740$ എന്നിങ്ങനെ

ഇവിടെ $R_1 = 30, R_2 = 70$ എന്നീ മൂല്യങ്ങൾ സങ്കല്പിച്ചാൽ $x = 240n + 90$ എന്നു കിട്ടും.

അതായത് $x = 90, 330, 570$ എന്നിങ്ങനെ മൂല്യങ്ങൾ

കരണസൂത്രം 50

അത്രാധികസ്യ വർണ്ണസ്യ ഭാജ്യഃ തസ്യേപ്സിതാമിതി
ഭാഗലബ്ധസ്യ നോ കൽപ്യാ ക്രിയാ വ്യഭിചരേത്തഥാ

അർത്ഥം

അധികവർണ്ണം = അധിക അവ്യക്തസംഖ്യ, ഭാഗലബ്ധി = ലബ്ധിയുടെ അധികമൂല്യങ്ങൾ

സാരം

ഭാജ്യത്തിന്റെയും ഭാജകത്തിന്റെയും അവ്യക്തഘടകങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ (ഗുണലബ്ധികൾ)ക്ക് അധിക അവ്യക്തഘടകങ്ങൾ ഇഷ്ടം പോലെ അനുമാനിക്കാവുന്നതാണ്. എന്നാൽ ഈ ഘടക ങ്ങൾക്ക് അനിശ്ചിതമായ മൂല്യങ്ങൾ സങ്കല്പിക്കാൻ പാടില്ല.

ഭാജ്യത്തിന്റെയും ഭാജകത്തിന്റെയും ഗുണകാരങ്ങൾ ഗുണം എന്നും ലബ്ധി എന്നും അറിയപ്പെടുന്നു. ഈ ഗുണലബ്ധിയ്ക്ക് മറ്റൊരു അവ്യക്ത ഘടകം പകരമാക്കി വയ്ക്കാവുന്നതാണ്, എന്നാൽ ആ അവ്യക്ത ഘടകത്തിന്റെ മൂല്യത്തിനു പരിമിതികളുണ്ടാകും.

ഉദാഹരണം 83

കഃ പഞ്ചഗുണിതോ രാശിഃ ത്രയോദശ വിഭാജിതഃ
യല്ലബ്ധം രാശിനായുക്തം ത്രിംശത് ജാതം വദാƒശുതം

അർത്ഥം

പഞ്ചഗുണിതോ രാശിഃ = 5 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച സംഖ്യ, ത്രയോദശ വിഭാജിതഃ = 13 കൊണ്ടു ഹരിച്ചത്, യല്ലബ്ധം രാശിനാ യുക്തം = ലഭിക്കുന്ന (ഹരണഫലം) സംഖ്യ ചേർത്ത്, ത്രിംശത് ജാതം = 30 ആകുന്നു.

സാരം

ഏതു സംഖ്യയെ 5 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 13 കൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം ആ സംഖ്യയോടു ചേർത്തത് 30 ആകുന്നുവോ ആ സംഖ്യ ഏതെന്നു വേഗം പറയുക.

സംഖ്യ = x എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

$\frac{5x}{13}$ ഹരണഫലം m + ശിഷ്ടം R

$5x = 13m + R$

$x + m = 30$ $\qquad m = 30 - x$

$5x = 13(30-x) + R$

$18x = 390 + R$

$$x = \frac{390}{18} + \frac{R}{18} = 21 + \frac{12+R}{18} \therefore R = 6 \qquad x = 22$$

$x = 22, R = 6$

$5 \times 22 \div 13$ - ഹരണഫലം 8

x + ഹരണഫലം = 22 + 8 = 30 സംഖ്യ = 22

ഉദാഹരണം 84

ഷഡഷ്ട ശതകാ ക്രീത്വാ സമാർഘേന ഫലാനി യേ വിക്രീയ ച പുനഃ ശേഷം ഏകൈകം പഞ്ചഭിഃ പണൈഃ ജാതാ സമപണാഃ തേഷാം കഃ ക്രയോ വിക്രയഃ ച കഃ

അർത്ഥം

ഷഡഷ്ടശതകം = 6, 8, 100, സമാർഘേന = ഒരേ വിലയ്ക്ക്, ഫലാനി = ഫലങ്ങൾ, വിക്രീയ പുനഃ = വീണ്ടും വിറ്റു, ഏകൈകം പഞ്ചഭിഃ = ഒന്നിന് അഞ്ചുവച്ച്, സമപണാഃ = തുല്യ പണമായി, ക്രീത്വാ = വിലയ്ക്കു വാങ്ങിയിട്ട്.

സാരം

മൂന്നു കച്ചവടക്കാർ 6, 8, 100 എന്നീ പ്രകാരം പണം കൊണ്ട് ഫലങ്ങൾ ഒരേ വിലയ്ക്കു വാങ്ങി. അവയിൽ ഏതാനും ഭാഗം ഒരോരുത്തരും ഒരേ വിലയ്ക്കു വിറ്റു. ശേഷിച്ചവ ഒന്നിന് 5 പണം എന്ന നിരക്കിൽ വിറ്റപ്പോൾ അവർക്കു തുല്യ ധനമുണ്ടായി. അവർ ക്രിയവിക്രിയം ചെയ്ത നിരക്ക് എത്ര?

വാങ്ങിയ നിരക്ക് പണത്തിന് x ഫലങ്ങളെന്നും വിറ്റത് പണത്തിന് y ഫലങ്ങളെന്നും സങ്കല്പിക്കുക. A, B, C എന്ന് കച്ചവടക്കാർക്കു തിരിച്ചറിയൽ സംജ്ഞകൊടുക്കാം. ഓരോരുത്തരും പ്രത്യേകം വിറ്റഫലങ്ങൾ a, b, c എന്നും സങ്കല്പിക്കുക.

കച്ചവടക്കാർ	A	B	C
മൂലധനം (പണം)	6	8	100
പണത്തിന് x ഫലങ്ങൾ പ്രകാരം വാങ്ങിയഫലങ്ങൾ	$6x$	$8x$	$100x$
പ്രത്യേകം വിറ്റഫലങ്ങൾ	a	b	c
ശേഷിച്ച ഫലങ്ങൾ	$6x$ - a	$8x$ - b	$100x$ -c

പണത്തിന് y ഫലങ്ങൾ എന്ന പ്രകാരം വിറ്റുകിട്ടിയത്

$$\frac{6x-a}{y} \quad \frac{8x-b}{y} \quad \frac{100x-e}{y}$$

ഫലത്തിന് 5 പണം വെച്ചു പ്രത്യേകം വിറ്റുകിട്ടിയ തുക.

5a 5b 5c

ആകെ മുതൽ $\frac{6x-a}{y}+5a \quad \frac{8x-b}{y}+5b \quad \frac{100x-c}{y}+5c$

അവ തുല്യമാണ് അതായത്

$6x - a + 5ya = 8x - b + 5yb = 100x - c + 5cy$

ഇവയിൽ നിന്നും

$2x = (a-b)(5y-1)$

$92x = (b-c)(5y-1)$

$94x = (a-c)(5y-1)$

$$\frac{92x}{2x} = 46 = \frac{b-c}{a-b} \qquad \frac{94x}{2x} = 47 = \frac{a-c}{a-b}$$

ഇവിടെ $5y - 1 = x$ എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

$47(a - b) = a - c$

a, c യെക്കാൾ വലുതാണെന്നു സങ്കല്പിച്ചാൽ a - b ഒരു ധനസംഖ്യയാകും.

a - b = 1, 2, 3 തുടങ്ങിയ സംഖ്യകൾ സങ്കല്പിക്കുക.

a - b = 1 ആയാൽ a - c = 47 എന്നാകും

c യുടെ മൂല്യം ഒരു ധനസംഖ്യയാകണമെങ്കിൽ a യുടെ മൂല്യം 48 ൽ കൂടുതലായിരിക്കണം

അതായത് c = 1 ആയാൽ a = 48, b = 47

c = 2 ആയാൽ a = 49, b = 48 എന്നിങ്ങനെയാകും.

അതുപോലെ a - b = 2 ആയാൽ a = 96, b = 94 എന്ന് മൂല്യങ്ങൾ

$2x = (a - b)(5y - 1)$ എന്നതിൽ $5y - 1 = x$ ആകുമ്പോൾ

$6x + a(5y - 1) = 6x + ax = x(a + 6) = 102x$ a=96 ആകുമ്പോൾ

A യുടെ ധനം $\frac{102x}{y}$ ഇത് ഒരു പൂർണ്ണസംഖ്യയാകാൻ

y = 102 എന്നു സങ്കല്പിക്കുക. $x = 5 \times 102 - 1 = 509$

മറ്റു മൂല്യങ്ങൾ താഴെ കൊടുക്കുന്നു.

a - b	a	b	c	x	y
2	97	95	3	574	103
	98	96	4	574	104

ഇപ്രകാരം നിരവധി ഉത്തരങ്ങൾ കാണാവുന്നതാണ്.

അദ്ധ്യായം 10

അനേക വർണ്ണ സമീകരണാന്തർഗതം മദ്ധ്യമാഹരണം

ഒന്നിലധികം അവ്യക്തഘടകങ്ങളുള്ള സമവാക്യങ്ങളിൽ ഒന്നിലധികം ദ്വിഘാത സമവാക്യങ്ങളുണ്ടാകാം. ഇത്തരം സമവാക്യങ്ങളെ രണ്ടു വർഗ്ഗ ഗ്രൂപ്പുകളാക്കി അവയുടെ വർഗ്ഗമൂലങ്ങൾ തുല്യമാക്കി ഘടകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കാൻ സാധിക്കും. അത്തരം സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്നും അവ്യക്ത സംഖ്യകൾ കാണാനുള്ള പ്രകരണമാണ് ഇവിടെ പ്രതിപാദിക്കുന്നത്.

കരണസൂത്രം 51

വർഗ്ഗാദ്യം ചേൽ തുല്യ ശുദ്ധൌ കൃതായാം
പഞ്ച സൈക്യസ്യോക്തവദ് വർഗ്ഗമൂലം
വർഗ്ഗ പ്രകൃത്യാ പരപക്ഷമൂലം
തയോഃ സമികാര വിധിഃ പുനശ്ച
വർഗ്ഗപ്രകൃത്യാ വിഷയോ ന ചേൽ സ്യാൽ
തദാ*f*ന്യവർണ്ണസ്യ കൃതേഃ സമം തം
കൃത്വാ*f*പരം പക്ഷം അഥാ ന്യമാനം
കൃതിപ്രകൃത്യാ*f*ദ്യമിതിഃ തഥാ ച
വർഗ്ഗപ്രകൃത്യാ വിഷയോ യഥാ സ്യാൽ
തഥാ സുധീഭിർ ബഹുധാ വിചിന്ത്യാ

അർത്ഥം

വർഗ്ഗാദ്യം = വർഗ്ഗം മുതലായവ, പക്ഷസ്യ ഏകസ്യ = ഒരു പക്ഷത്തിന്റെ ഉക്തവദ് = പറഞ്ഞപ്രകാരം, വർഗ്ഗപ്രകൃതി = കുട്ടകവിധി, അന്യവർണ്ണസ്യ കൃതി = മറ്റൊരു അവ്യക്ത ഘടകത്തിന്റെ വർഗ്ഗം, വർഗ്ഗപ്രകൃത്യാ വിഷയോന ചേൽ = വർഗ്ഗപ്രകൃതി ഉപയോഗിച്ച് ക്രിയ ചെയ്യാൻ സാധ്യമല്ലെങ്കിൽ.

സാരം

സമവാക്യത്തിൽ വർഗ്ഗഘടകങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ അവയെ ഒരു വശത്താക്കി. അതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക. മറുപക്ഷത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം വർഗ്ഗപ്രകൃതി ഉപയോഗിച്ചു കണക്കാക്കുക. ഇരുവശത്തും മൂലങ്ങളെ സമീകരിച്ച് ഘടകങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ നിർണ്ണയിക്കണം.

മറുവശത്തെ ഘടകങ്ങൾ വർഗ്ഗ പ്രകൃതിരീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാൻ പറ്റുന്നില്ലെങ്കിൽ അതിനെ ഒരു അവ്യക്ത വർഗ്ഗമായി കണക്കാക്കി ഇരുപക്ഷവും വീണ്ടും തുല്യമാക്കി വർഗ്ഗമൂലം കണക്കാക്കാം. അല്ലാത്തപക്ഷം അതിന്റെ (രണ്ടാമത്തെ പക്ഷം) വർഗ്ഗമൂലം കാണാൻ ബുദ്ധിമാന്മാർ മറ്റ് അനേക മാർഗ്ഗങ്ങൾ ആരായും.

കരണസൂത്രം 52

ബീജം മതിർ വിവിധ വർണ്ണ സഹായിനി ഹി
മന്ദാവബോധ വിധയേ വിബുധൈർ നിജാദ്യൈഃ
വിസ്താരിതാ ഗണക താമരസാംശുമദ് ഭിർ
യാ സൈവ ബീജഗണിതാഹ്വയതാം ഉപേതാ

അർത്ഥം

വിവിധ വർണ്ണസഹായിനി = വിവിധ അക്ഷരങ്ങളുടെ സഹായത്തോടെ, മന്ദാവബോധ വിധം = മന്ദബുദ്ധികൾക്കു വിജ്ഞാനമുണ്ടാകുന്ന വിധം, ആദ്യൈഃ വിബുധൈർ = ബുദ്ധിമാന്മാരായ പൂർവ്വികന്മാർ, വിസ്താരിതാ = വിവരിച്ചു. താമരസ അംശുമദ്ഭിഃ = താമരയ്ക്ക് സൂര്യൻ കണക്കെ, ആഹ്വായത = വിളിക്കുന്നു.

സാരം

വിവിധ അക്ഷരങ്ങൾ വ്യത്യസ്ത അവ്യക്തഘടകങ്ങൾക്കു പകരമായി സ്വീകരിച്ച് മന്ദബുദ്ധികൾക്ക് മനസ്സിലാകുംവിധം ബുദ്ധിമാന്മാരായ പൂർവ്വികർ താമരയ്ക്ക് സൂര്യൻ എന്ന കണക്കേ വെളിച്ചം നൽകുമാറ് വിസ്തരിച്ചിട്ടുണ്ട്. അതിന് ബീജഗണിതം എന്ന പേർ പറയുന്നു.

കരണസൂത്രം 53

ഏകസ്യ പക്ഷസ്യ പദേ ഗൃഹീത്വേ
ദ്വിതീയപക്ഷേ യദി രൂപയുക്തഃ
അവ്യക്തവർഗ്ഗോഽത്ര കൃതിപ്രകൃത്യാ
സാധ്യേ തഥാ ജ്യേഷ്ഠ കനിഷ്ഠമൂലേ
ജ്യേഷ്ഠം തയോഃ പ്രഥമ പക്ഷ പദേന തുല്യം
കൃത്വോക്തവദ് പ്രഥമ വർണ്ണമിതിഃ പ്രസാധ്യാ
ഹ്രസ്വം ഭവേത് പ്രകൃതി വർണ്ണമിതിഃ സുധീഭിഃ
ഏവം കൃതിപ്രകൃതിരത്ര നിയോജനീയാ

അർത്ഥം

ഗൃഹീത്വാ = കണ്ടുപിടിച്ച്, ജ്യേഷ്ഠ കനിഷ്ഠമൂലം = വലുതും ചെറുതുമായ മൂല്യങ്ങൾ, നിയോജനിയാ = ഉപയോഗിക്കുന്നു.

സാരം

ഒരു പക്ഷത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കണ്ടുപിടിക്കുക. അന്യ പക്ഷത്ത് സംഖ്യയോടുകൂടിയ അവ്യക്തവർഗ്ഗമുണ്ടെങ്കിൽ അതിനെ വർഗ്ഗപ്രകൃതി ഉപയോഗിച്ച് സാധുവായ ജ്യേഷ്ഠമൂലവും കനിഷ്ഠ മൂലവും കാണാം. പ്രഥമ പക്ഷത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലത്തിനു തുല്യ മാണ് ജ്യേഷ്ഠമൂലം. അതിൽ നിർദ്ദേശിച്ചപ്രകാരം (ആദ്യ അവ്യക്ത ഘടകത്തിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ) വർഗ്ഗപ്രകൃതിയിൽ പ്രകൃതി യുടെ ഗുണകാരമാണ് ഹ്രസ്വമൂലം. ഇപ്രകാരം ബുദ്ധിമാന്മാർ വർഗ്ഗ പ്രകൃതി ഉപയോഗിച്ച് പ്രശ്നങ്ങൾക്കു ഉത്തരം കാണുന്നു.

ഉദാഹരണം 85

കോരാശിഃ ദ്വിഗുണോ, രാശി വർഗൈഃ ഷഡ്ഭിഃ സമന്വിതഃ
മൂലദോ ജായതേ ബീജഗണിതജ്ഞ വദാഽശു തം

അർത്ഥം

കോ രാശിഃ = ഏതു സംഖ്യ, ദ്വിഗുണോ = രണ്ടുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്, രാശി വർഗ്ഗം = സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗം, ഷഡ്ഭി = 6 ഇരട്ടി , സമന്വിത = കൂട്ടിയത്

സാരം

ഹേ, ഗണിതജ്ഞ, ഏതു സംഖ്യയുടെ രണ്ടിരട്ടിയും ആ സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗത്തിന്റെ 6 ഇരട്ടിയും ചേർന്നത് ഒരു വർഗ്ഗമൂലം ഉളവാക്കുന്ന സംഖ്യയാകുമോ. അത് എത്രയെന്ന് വേഗം പറഞ്ഞാലും.

സംഖ്യ x എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

$6x^2 + 2x =$ വർഗ്ഗസംഖ്യ $= y^2$

ഇരുഭാഗവും 6 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 1 വീതം കൂട്ടുക.

$36x^2 + 12x + 1 = 6y^2 + 1$

ഇടതുവശം $= (6x + 1)^2$ എന്നാകുന്നു. $6x + 1 = z$ എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

$6y^2 + 1 = z^2$ ഇത് ഒരു വർഗ്ഗപ്രകൃതിയാണ്. $y = 2$, $z = 5$ എന്നത് ഉത്തരമാകും

$z = 6x + 1$ ആകയാൽ z ന്റെ മൂല്യം 7 ൽ കൂടുതലായാൽ മാത്രമേ x ന് ധനമൂല്യം ലഭിക്കൂ.

വർഗ്ഗപ്രകൃതിയുടെ അടുത്ത (y, z) മൂല്യങ്ങൾ

$y = 2 \times 2 \times 5 = 20$ $\quad z = 6 \times 4 + 25 = 49$

$y = 198$ $z = 485$, $-y = 1960$, $z = 4801$ എന്നിങ്ങനെ മൂല്യങ്ങൾ

$z = 6x + 1 = 49$, $\quad 6x = 48$, $x = 8$

$6 \times 8^2 + 2 \times 8 = 400 = 20^2$ $\quad$ സംഖ്യ $= 8$ (ഉത്തരം)

$z = 4801 = 6x + 1$ $\quad x = 800$ (മറ്റൊരു മൂല്യം)

ഉദാഹരണം 86

രാശിയോഗകൃതിർമിശ്രാ രാശ്യോർ യോഗഘനേന ച
ദ്വിഘ്നസ്യ ഘനയോഗസ്യ സാ തുല്യാ ഗണകോച്യതാം

അർത്ഥം

രാശിയോഗകൃതി = സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ വർഗ്ഗം, രാശ്യോർ യോഗ ഘനം = സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ ഘനം, ഘനയോഗം = ഘനങ്ങളുടെ തുക, ഉച്യതാം = പറഞ്ഞാലും.

സാരം

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ വർഗ്ഗവും ഘനവും കൂട്ടിയത്. അവയുടെ ഘനങ്ങളുടെ തുകയുടെ ഇരട്ടിക്കു തുല്യമായാൽ ആ സംഖ്യകൾ ഹേ, ഗണക, പറഞ്ഞാലും.

സംഖ്യകൾ യഥാക്രമം x, y എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

രാശിയോഗ വർഗ്ഗം $= (x+y)^2$

രാശിയോഗ ഘനം $= (x+y)^3$

ഘനയോഗത്തിന്റെ ഇരട്ടി $= 2(x^3+y^3)$

ഇവിടെ $(x+y)^2 + (x+y)^3 = 2(x^3+y^3)$

$x = u + v$ എന്നും $y = u - v$ എന്നും സങ്കല്പിക്കുക

$x + y = 2u \qquad x - y = 2v$

$$4u^2 + 8u^3 = 2\left[(u+v)^3 + (u-v)^3\right] =$$

$$= 4\left[u^3 + 3uv^2\right]$$

$$4u^3 + 4u^2 = 12uv^2$$

ie $\quad 4u^2 + 4u = 12v^2$

or $\quad 4u^2 + 4u + 1 = 12v^2 + 1$

or $\quad 12v^2 + 1 = (2u+1)^2 = z^2$

ഈ കുട്ടകത്തിലെ (u, z) മൂല്യങ്ങൾ $u = 2, z = 7$

$u = 28, z = 97$

$2u + 1 = z = 7, \qquad u = 3, v = 2$

$z = 97, u = 48, v = 28$

ഇതിൽ നിന്നും $x = u + v = 5, y = u - v = 1$

അഥവാ $x = 76, y = 20.$

$v = \frac{15}{2}$, $z = 26$ എന്ന മൂല്യങ്ങളും കുട്ടകത്തിന് അനുയോജ്യ മായതിനാൽ

$u = \frac{25}{2}, \frac{15}{2}$, $x = 26, y = 5$ എന്ന ഉത്തരങ്ങളും ഇതിൽ നിന്നും ലഭിക്കും.

കരണസൂത്രം 54

ദ്വിതീയ പക്ഷേ സതി സംഭവേ തു
കൃത്യാfപവർത്ത്യാfത്ര പദേ പ്രസാധ്യേ
ജ്യേഷ്ഠം കനിഷ്ഠേന തഥാ നിഹന്യാ
ചേൽ വർഗ്ഗവർഗ്ഗേണ കൃതോfപവർത്തഃ
കനിഷ്ഠ വർഗ്ഗേണ തഥാ നിഹന്യാ
ജ്യേഷ്ഠം തതഃ പൂർവ്വവദേവ ശേഷം

അർത്ഥം

ദ്വിതീയ പക്ഷം = രണ്ടാമത്തെ വശം (സമവാക്യത്തിന്റെ) കൃത്യാ അപവർത്ത്യ = (അവ്യക്തഘടകത്തിന്റെ) വർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഹരിച്ച് (ലഘൂകരിച്ച്), ജ്യേഷ്ഠം കനിഷ്ഠേന നിഹന്യാ = ജ്യേഷ്ഠമൂലത്തെ കനിഷ്ഠമൂലം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, വർഗ്ഗവർഗ്ഗം = വർഗ്ഗത്തിന്റെ വർഗ്ഗം, കനിഷ്ഠ വർഗ്ഗേണ നിഹന്യ = കനിഷ്ഠമൂലത്തിന്റെ വർഗ്ഗം കൊണ്ടു (ജ്യേഷ്ഠമൂലത്തെ) ഗുണിച്ച്.

സാരം

സമവാക്യത്തിലെ രണ്ടാമത്തെ പക്ഷത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കാണാൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ അവ്യക്തഘടകത്തിന്റെ വർഗ്ഗം കൊണ്ട് ഹരിച്ചു കുട്ടകം നിർധാരണം ചെയ്യുക അതിൽ നിന്നും ലഭിക്കുന്ന ജ്യേഷ്ഠമൂലത്തെ കനിഷ്ഠമൂലം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് യഥാർത്ഥ ജ്യേഷ്ഠമൂലം കാണുക.

ദ്വിതീയ പക്ഷത്തെ അവ്യക്തഘടകത്തിന്റെ വർഗ്ഗ വർഗ്ഗം കൊണ്ടാണ് ഹരിച്ച് ലഘൂകരിച്ചതെങ്കിൽ കുട്ടകത്തിലെ ജ്യേഷ്ഠമൂലത്തെ കനിഷ്ഠമൂലത്തിന്റെ വർഗ്ഗം കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് യഥാർത്ഥ ജ്യേഷ്ഠമൂലം കാണുക. പിന്നീടുള്ള ഗണിതം മുമ്പു പറഞ്ഞതു പോലെ തന്നെയാണ്.

ഉദാഹരണം 87

യസ്യ വർഗ്ഗകൃതിഃ പഞ്ചഗുണാ വർഗ്ഗശതോനിതാ
മൂലദാ ജായതേ രാശി ഗണിതജ്ഞ വദാ*f*ശു തം

അർത്ഥം

വർഗ്ഗകൃതി = വർഗ്ഗവർഗ്ഗം, പഞ്ചഗുണാ = 5 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്, വർഗ്ഗശതം ഊനിതാ = വർഗ്ഗത്തിന്റെ 100 ഇരട്ടി കുറച്ചത്

സാരം

ഹേ, ഗണിതജ്ഞ, ഏതു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗ വർഗ്ഗത്തിന്റെ 5 ഇരട്ടിയിൽ നിന്നും അതിന്റെ വർഗ്ഗത്തിന്റെ 100 ഇരട്ടി കുറച്ചത് വർഗ്ഗമൂലം തരുമോ, ആ സംഖ്യ ഏതെന്നു വേഗം പറഞ്ഞാലും.

സംഖ്യ x എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

$5x^4 - 100x^2$ = വർഗ്ഗസംഖ്യ $= y^2$ എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

x^2 കൊണ്ട് ഇരുവശത്തേയും ഹരിക്കുക.

$$5x^2-100=\left(\frac{y}{x}\right)^2=z^2;\left(z=\frac{y}{x}\right) \quad 5x^2-100=z^2$$

എന്ന വർഗ്ഗ പ്രകൃതിക്ക് $x = 5, z = 5$ എന്ന മൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കും. ഇതിൽ നിന്നും, മറ്റു മൂല്യങ്ങൾ $x = 10, z = 20$

$$z=\frac{y}{x}=5, x=5 \therefore y=5\times5=25$$

$$5x^4-100x^2=5\times5^4-100\times5^2=625=25^2$$

സംഖ്യ= 5

ഇതിലെ ക്ഷേപകം 100 എന്നത് വർഗ്ഗസംഖ്യയാകയാൽ $5x^2 - 1 = z^2$ എന്ന കുട്ടകത്തിനു യോജിക്കുന്ന $x = 1, z = 2$ എന്ന ഫലങ്ങൾ ലഭിക്കും

$5x^2 - 100 = z^2$ എന്നതിന്റെ മൂലം $x = 10$, $z = 20$ എന്നും ഉത്തരങ്ങളാകും. അതായത് $y = 20 \times 10 = 200$

മൂലകുട്ടകത്തിനെ x^2 കൊണ്ട് ഹരിച്ചതിനാൽ ജ്യേഷ്ഠമൂലം=$20 \times$ കനിഷ്ഠമൂലം $= 20 \times 10 = 200$ എന്നതായിരിക്കും.

$5x^4 - 100x^2$ എന്നതിന്റെ ഫലങ്ങൾ

$x = 10, y = 200$ എന്ന് ഉത്തരമാകും.

ഉദാഹരണം 88

കയോഃ സ്യാൽ അന്തരേ വർഗ്ഗോ
വർഗ്ഗയോഗോ യയോർ ഘനഃ
തൗ രാശീ കഥയാ ഭിന്നൌ
ബഹുധാ ബീജ വിത്തമ

അർത്ഥം

കയോ = ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ, അന്തരേ വർഗ്ഗോ = വ്യത്യാസം വർഗ്ഗസംഖ്യയാകുന്നു. അഭിന്നം = ഭിന്നസംഖ്യ യല്ലാത്തത്.

സാരം

ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം ഒരു വർഗ്ഗസംഖ്യയും അവയുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക ഒരു ഘന സംഖ്യയുമാകുന്നുവോ ആ സംഖ്യകൾക്ക് ഭിന്നസംഖ്യയല്ലാത്ത അനേകമൂല്യങ്ങൾ, ഹേ, ബീജ ഗണിതജ്ഞ പറഞ്ഞാലും.

സംഖ്യകൾ x, y എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

$x - y$ = ഒരുവർഗ്ഗസംഖ്യ $= u^2$

$x^2 + y^2$= ഒരു ഘനസംഖ്യ $= v^3$

ഇവയിൽ ആദ്യ സമവാക്യത്തിൽ നിന്നും $y = x - u^2$ എന്നു ലഭിക്കുന്നു.

$x^2 + y^2 = x^2 + (x - u^2)^2 = v^3$ $\qquad 2x^2 - 2xu^2 + u^4$

ഇത് ഒരു ഘന സംഖ്യയായതിനാൽ $v = u^2$ എന്നു സങ്കല്പിക്കുക

$2x^2 - 2xu^2 + u^4 = u^6$

അഥവാ $u^6 u^4 = 2x^2 - 2xu^2$

ഇരുവശങ്ങളെയും രണ്ടു കൊണ്ടു ഗുണിക്കുക. u^4 കൂട്ടുക.

$2u^6 - 2u^4 + u^4 = 4x^2 + 4xu^2 + u^4$

$2u^6 - u^4 = (2x - u^2)^2$

ഇരുഭാഗവും u^4 കൊണ്ടു ഹരിക്കുക.

$$2u^2 - 1 = \left(\frac{2x}{u^2} - 1\right)^2 = w^2 \qquad 2u^2 - 1 = w$$

ഈ കുട്ടകത്തിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ കാണണം

$u = 5, w = 7$

അഥവാ $u = 29, w = 41$ എന്നും രണ്ടു മൂല്യങ്ങൾ സ്വീകരിക്കാം.

$u = 5$ എന്നായാൽ $\frac{2x}{u^2} - 1 = w = 7$

$$\frac{2x}{25} - 1 = 7, \therefore 2x = 8 \times 25 = 200$$

$x = 100, y = x - u^2 = 100 - 25 = 75$

$x = 100, y = 75$ (ഒരു മൂല്യം)

$u = 29$ ആയാൽ $u^2 = 29^2 = 841$

$$\frac{2x}{841} = 42 \therefore x = 841 \times 21 = 17661$$

$y = x - u^2 = 17661 - 841 = 16820$

$x = 17661, y = 16820$ (മറ്റൊരു മൂല്യം)

കരണസൂത്രം 55

സാവ്യക്തരൂപോ യദി വർണ്ണ വർഗ്ഗഃ
തദാ*f*ന്യ വർണ്ണസ്യ കൃതേഃ സമം തം
കൃത്വാ പദം തസ്യ തദാന്യ പക്ഷേ
വർഗ്ഗപ്രകൃത്യോ ക്തവദേവ മൂലേ
കനിഷ്ഠമാദ്യേന പദേന തുല്യം
ജ്യേഷ്ഠം ദ്വിതീയേന സമം വിദധ്യാത്

അർത്ഥം

സാവ്യക്തരൂപം = അവ്യക്തസംഖ്യനും സ്ഥിരസംഖ്യയും കൂട്ടിയത്, അന്യവർണ്ണസ്യകൃതി = മറ്റൊരു അവ്യക്തസംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം

സാരം

അവ്യക്തഘടകത്തോടു കൂടിയ അവ്യക്ത വർഗ്ഗസംഖ്യ മറ്റൊരു വർണ്ണത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തിനു തുല്യമായി കണക്കാക്കുക. അതിൽ നിന്നും ആദ്യ പക്ഷത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക. വർഗ്ഗപ്രകൃതി ഉപയോഗിച്ച്, ജ്യേഷ്ഠമൂലം കാണുക. ആദ്യത്തെ മൂലത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കനിഷ്ഠമൂലത്തിനു തുല്യമായി കണക്കാക്കുക. രണ്ടാമത്തേത് ജ്യേഷ്ഠമൂലത്തിനു സമവുമായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 89

ത്രികാദി ദ്വ്യുത്തര ശ്രേഢ്യാം ഗച്ഛേ ക്വാപി ച യത് ഫലം
തദേവ ത്രിഗുണം കസ്മിൻ അന്യഗച്ഛേ ഭവേത് വദ

അർത്ഥം

ത്രികാദി = ആദ്യസംഖ്യ മൂന്നാണ്, ദ്വ്യുത്തരം = ഘടകങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം രണ്ടാണ്, ശ്രേഢി = ശ്രേണി, ഫലം = ഗച്ഛേധനം

സാരം

ഒരു ഗണിതശ്രേണി (AP) യിൽ ആദ്യഘടകം 3, ചയം 2, എന്നിവയാണ്, ഏതാനും ഘടകങ്ങളുടെ സർവ്വധനത്തിന്റെ മൂന്നിരട്ടി മറ്റൊരു ഗച്ഛ സംഖ്യയുള്ള അതേ ശ്രേണിക്കു തുല്യമാണെങ്കിൽ ഗച്ഛ സംഖ്യകൾ കാണുക.

ഗണിതശ്രേണി a, (a+d) (a+2d),..........(a+(n-1)d)

എന്നിങ്ങനെ നിശ്ചിത ഘടകവ്യത്യാസവും (ചയം) നിശ്ചിത ആദ്യഘടകവുമുള്ളതാണ്. ഇവിടെ $a = 3, d = 2$ എന്നു തന്നിരിക്കുന്നു.

ഇവയിൽ m ഗച്ഛസംഖ്യയുള്ള ശ്രേണിയുടെ ആകെ മൂല്യം

$$S_m=\left[3+\frac{m-1}{2}\times 2\right]m = 3m+(m-1)m = m^2+2m$$

n ഗച്ഛസംഖ്യയുള്ള ശ്രേണിയുടെ ആകെ മൂല്യം

$$S_n=\left[3+\frac{n-1}{2}\times 2\right]n = 3n+(n-1)n = n^2+2n$$

ആദ്യഗച്ഛധനത്തിന്റെ മൂന്നിരട്ടിയാണ് രണ്ടാമത്തേത്
$3(m^2 + 2m) = n^2 + 2n$

ഇരുവശത്തും 1 വീതം കൂട്ടുമ്പോൾ
$3m^2 + 6m + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$

വലതുവശം പൂർണ്ണസംഖ്യയാകുന്നു.

ഇരുവശങ്ങളെയും 3 കൊണ്ടു ഗുണിക്കുമ്പോൾ
$9m^2 + 18m + 3 = 9m^2 + 18m + 9 - 6$
$= (3m + 3)^2 - 6 = 3(n + 1)^2$
$3(n+1)^2 + 6 = (3m + 3)^2$

അതായത് $3(m+1)^2 - 2 = (n+1)^2$; $m+1 = x$, $n + 1 = y$ എന്നും സങ്കല്പിക്കുമ്പോൾ $3x^2 - 2 = y^2$ എന്ന വർഗ്ഗപ്രകൃതി ലഭിക്കും. ഇത് $x = 1, y = 1$ എന്ന പ്രാഥമിക മൂല്യമാകും.

$3x^2 + 1 = y^2$ എന്ന സഹായകവർഗ്ഗപ്രകൃതിയുടെ മൂല്യങ്ങൾ $x = 1, y = 2$

ഇവയിൽ നിന്നും $3x^2 - 2 = y^2$ എന്നതിന്റെ മറ്റുമൂല്യങ്ങൾ കാണാം.

$x_1 = 3$	$m_1 = 2$,	$y_1 = 5$,	$n_1 = 4$
$x_2 = 11$	$m_2 = 10$,	$y_2 = 19$,	$n_2 = 18$
$x_3 = 41$	$m_3 = 40$,	$y_3 = 71$,	$n_3 = 70$

ഇപ്രകാരം അനവധി ഗച്ഛ സംഖ്യകൾ കാണാം.

കരണസൂത്രം 56

സരൂപകേ വർണ്ണകൃതീതു യത്ര
തത്രേച്ഛയൈകാം പ്രകൃതീം പ്രകല്പ്യ
ശേഷം തതഃ ക്ഷേപകം ഉക്തവൽ ച
മൂലേ വിദധ്യാത് അസകൃത് സമതേ

അർത്ഥം

സരൂപകേ വർണ്ണകൃതി = സംഖ്യയോടു കൂടിയ അവ്യക്ത സംഖ്യാ വർഗ്ഗം, തത്രേച്ഛയൈകം = തത്രഇച്ഛ ഏകം = അവിടെ ഇഷ്ടമുള്ള ഒന്ന്, പ്രകൃതിം പ്രകല്പ്യ = പ്രകൃതിയായി സങ്കല്പിച്ച്, ശേഷം തതഃ = അതിൽ നിന്നും ശേഷിച്ചവ, മൂലേ വിദധ്യാത് = മൂലം കാണുക.

സാരം

അവ്യക്ത സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗവും പൂർണ്ണസംഖ്യയും ഒരു വശത്തുണ്ടെങ്കിൽ അവിടെ ഇഷ്ടമുള്ള ഒന്ന് പ്രകൃതിയായി സങ്കല്പിച്ച ശേഷം ഭാഗം ക്ഷേപകമാക്കി മുമ്പു പറഞ്ഞപ്രകാരം മൂലങ്ങൾ കാണുക. ഇതിൽ നിന്നും സമീകരണത്തിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കും.

ഉദാഹരണം 90

തൌ രാശി വദ യത് കൃത്യോഃ സപ്താഷ്ട ഗുണയോർ യുതിഃ
മൂലദാ സ്യാൽ വിയോഗ സ്തു മൂലദോ രൂപ സംയുതഃ

അർത്ഥം

തൌ രാശീ വദ = ആ സംഖ്യകൾ പറയുക, സപ്താഷ്ട ഗുണയോർ യുതി = 7, 8 എന്നിവ കൊണ്ടു യഥാക്രമം ഗുണിച്ചു കൂട്ടിയത്, വിയോഗ സ്തു രൂപ സംയുത = അവയുടെ വ്യത്യാസത്തോടു ഒന്നു കൂട്ടിയത്.

സാരം

ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളെ യഥാക്രമം 7,8 എന്നിവ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കൂട്ടിയത് വർഗ്ഗസംഖ്യയാകുന്നു?

അവയുടെ വ്യത്യാസത്തോട് (7,8 എന്നിവ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചവ) ഒന്നു കൂട്ടിയതും ഒരു വർഗ്ഗസംഖ്യയാകുന്നു. ആ സംഖ്യകൾ ഏവ എന്നു പറയുക.

സംഖ്യകൾ x, y എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

$7x^2 + 8y^2 =$ വർഗ്ഗസംഖ്യ $= u^2$

$7x^2 - 8y^2 + 1 =$ വർഗ്ഗസംഖ്യ $= v^2$

$7x^2 + 8y^2$ ഒരു വർഗ്ഗസംഖ്യയാകാൻ $x = 2y$ എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

$7x^2 + 8y^2 = 7x(2y)^2 + 8y^2 = 36y^2 = (6y)^2 = u^2$

$7x^2 - 8y^2 + 1 = 28y^2 - 8y^2 + 1 = 20y^2 + 1 = v^2$

ഈ കുട്ടകത്തിന്റെ പ്രാഥമിക മൂല്യങ്ങൾ

$y = 2, v = 9$

$y = 36, v = 161$ എന്നിങ്ങനെയാകുന്നു.

$y = 2$ ആയാൽ $x = 2y = 4$ എന്നും

$y = 36$ ആയാൽ $x = 72$ എന്നും മൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കും. സംഖ്യകൾ

(4,2), (72,36) etc.

ഉദാഹരണം 91

ഘന വർഗ്ഗയുതിഃ വർഗ്ഗോ യയോ രാശ്യോഃ പ്രജായതേ
സമാസോƒപി യയോർ വർഗ്ഗഃ തൗ രാശീ ശീഘ്രം ആനയ

അർത്ഥം

ഘന വർഗ്ഗയുതി = ഘനസംഖ്യയും വർഗ്ഗസംഖ്യയും കൂട്ടിയത്, സമാസം = സംഖ്യകളുടെ തുക, ആനയ = കൊണ്ടുവരിക.

സാരം

ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളിൽ ഒന്നിന്റെ ഘനവും രണ്ടാമത്തേതിന്റെ വർഗ്ഗവും കൂട്ടിയതും ആ സംഖ്യകളുടെ തുകയും വർഗ്ഗ സംഖ്യ കളാകുമോ, ആ സംഖ്യകൾ വേഗം പറയുക. (കൊണ്ടുവരിക)

സംഖ്യകൾ x, y എന്നു സങ്കല്പിക്കുക

$x^2 + y^2 =$ വർഗ്ഗസംഖ്യ $= u^2$

$x + y =$ വർഗ്ഗസംഖ്യ $= v^2$

ഇവിടെ x, y എന്നിവയ്ക്ക് മൂല്യങ്ങൾ സങ്കല്പിക്കേണ്ടിയിരിക്കുന്നു.

$x = 2\varpi^2$ എന്നും $y = 7\varpi^2$ എന്നും സങ്കല്പിച്ചാൽ

$x + y = 9\varpi^2$ എന്ന വർഗ്ഗസംഖ്യയാകും.

$x^3 + y^2 = 8\varpi^6 + 49\varpi^4 = u^2$

$$= \varpi^4(8\varpi^2 + 49) = \varpi^4(8\varpi^2 + 7^2) = u^2$$

അതായത് $8\varpi^2 + 49$ എന്നത് ഒരു വർഗ്ഗസംഖ്യയാകണം.

$$8\varpi^2 + 7^2 = \left(\frac{u}{\omega^2}\right)^2$$

$8\varpi^2 + 49 = z^2$ എന്നതിന് $\varpi = 2$, $z = 9$ എന്നും മൂല്യങ്ങളാണ്.

ഇതിൽ നിന്നും $x = 2\varpi^2 = 2 \times 4 = 8$

$$y = 7\varpi^2 = 7 \times 4 = 28$$

എന്ന് ഉത്തരങ്ങൾ

$8\varpi^2 + 49 = z^2$ എന്നതിനു മറ്റു മൂല്യങ്ങൾ

$\varpi = 7, \quad z = 21$

ഇതിൽ നിന്നും $x = 2\varpi^2 = 2 \times 7^2 = 98$

$$y = 7\varpi^2 = 7 \times 7^2 = 343$$

എന്നും മറ്റൊരു മൂല്യവും ലഭിക്കും.

ഇവിടെ $x = 2\varpi^2$, $y = 7\varpi^2$ എന്നും സങ്കല്പിച്ചത് $x^3 + y^2$ എന്നതിനെ ഒരു കുട്ടകരൂപത്തിൽ (വർഗ്ഗപ്രകൃതി) ലഭിക്കുവാനാണ്.

കരണസൂത്രം 57

സഭാവിതേ വർണ്ണകൃതി തു യത്ര
തൻമൂലമാദായ തു ശേഷകസ്യ
ഇഷ്ടോദ്ധൃതസ്യേഷ്ട വിവർജിതസ്യ
ദലേന തുല്യം ഹി തദേവ കാര്യം

അർത്ഥം

സഭാവിതം = ഭവിതത്തോടുകൂടിയത് (ഭാവിതം = xy), ഇഷ്ടോദ്ധൃതം = ഇഷ്ടസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചത്, ഇഷ്ടവിവർജിതം = ഇഷ്ടസംഖ്യകുറച്ചത്, ദലേന തുല്യം = പകുതിക്കു സമമായത്.

സാരം

ഭാവിതത്തോടു കൂടിയ അവ്യക്തഘടകവർഗ്ഗമുള്ളിടത്ത് അതിൽ നിന്നും ഒരു ഭാഗത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം (വർഗ്ഗഘടകങ്ങൾ ചേർത്ത്) കാണുക. ശിഷ്ടമുള്ള ഘടകത്തെ ഇഷ്ടസംഖ്യ കൊണ്ടു ഹരിച്ച് അതിൽ നിന്നും ഇഷ്ടസംഖ്യ കുറച്ച് ഫലത്തിന്റെ പകുതി ആദ്യം കണ്ട വർഗ്ഗമൂലത്തിനു തുല്യമായി കണക്കാക്കുക.

ഉദാഹരണമായി $x^2 + y^2 + 3xy = z^2$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ ആദ്യപക്ഷത്തിൽ $(x + y)^2$ എന്ന ഭാഗം മാറ്റിയാൽ ശേഷിക്കുന്നത് xy എന്ന ഘടകമായിരിക്കും. ഇതിനെ ഇഷ്ടസംഖ്യ q കൊണ്ടു ഹരിക്കുക.

$\left(\frac{xy}{q}\right)$ ഇതിൽ നിന്നും ഇഷ്ടസംഖ്യ കുറയ്ക്കുക. ഫലത്തിന്റെ പകുതി കാണുക.

അതായത് $\left(\frac{xy}{q}-q\right)\frac{1}{2}$ ഇത് ആദ്യമൂലത്തോടു തുല്യമാക്കുക

$x+y=\frac{xy}{2q}-\frac{q}{2}$ ഈ സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് x, y എന്നിവ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക. q യുടെ മൂല്യം മാറ്റുന്നതനുസരിച്ച് x, y മൂല്യങ്ങളും മാറും.

ഉദാഹരണം 92

യയോർ വർഗ്ഗയുതിർ ഘാത യുതാ മൂലപ്രദാ ഭവേത്
തൻ മൂല ഗുണിതോ യോഗഃ സരൂപാ ചാƒശൂ തൗ വദ

അർത്ഥം

യയോർ വർഗ്ഗയുതി = ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗ ങ്ങളുടെ തുക, ഘാതയുതാ = ഗുണിതം കൂട്ടിയത്, യോഗ = സംഖ്യകളുടെ തുക, സരൂപാ = ഒന്നുകൂട്ടിയത്.

സാരം

ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളും സംഖ്യകളുടെ ഗുണിതവും കൂട്ടിയത് ഒരു വർഗ്ഗമൂലമുളവാക്കുന്ന സംഖ്യയാകുന്നു? അതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലവും സംഖ്യകളുടെ തുകയും തമ്മിൽ ഗുണിച്ച് ഒന്നു കൂട്ടിയതും വർഗ്ഗസംഖ്യയാകുന്നു. ആ സംഖ്യകൾ പറയുക.

സംഖ്യകൾ x, y എന്നിവയായാൽ

$x^2 + y^2 + xy$ = വർഗ്ഗസംഖ്യ $= u^2$

$(x + y)u + 1$ = വർഗ്ഗസംഖ്യ $= v^2$

ഒന്നാമത്തെ സമവാക്യത്തെ 36 കൊണ്ടു ഗുണിക്കുക.

$36x^2 + 36xy + 9y^2 + 27y^2 = 36u^2$

അതായത് $(6x + 3y)^2 + 27y^2 = 36u^2$

$6x+3y=\frac{1}{2}\left(\frac{27y^2}{n}-n\right)$ ഇവിടെ n ഒരു ഇഷ്ടസംഖ്യയാണ്

n = y എന്നു സങ്കല്പിച്ചാൽ $6x+3y=\frac{1}{2}[27y-y]=13y$

അതായത് $6x = 10y, x=\frac{10}{6}y=\frac{5}{3}y$

$6u = \frac{1}{2}[27 y + y] = 14 y, \quad u=\frac{14}{6}y=\frac{7}{3}y$

ഇവ രണ്ടാമത്തെ സമവാകൃത്തിൽ പ്രയോഗിക്കുക

$(x+y)u+1=v^2 \quad (x+y)\frac{7}{3}y+1=v^2$

$3v^2 = 7y^2+7xy+3 \quad x=\frac{5}{3}y$ ആയതിനാൽ

$3v^2=7y^2+7\times\frac{5}{3}y^2+3=\frac{56}{3}y^2+3; \quad 9v^2=56y^2+9=(3z)^2$

അതായത് $z = 3v$

ഇതിന്റെ മൂല്യം $y = 6, z = 45, v = 15$

ഈ കുട്ടകത്തിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ

$y = 6, v = 15$

$y = 180, z = 1347, v = 449$

ഇതിൽ നിന്നും $x=\frac{5}{3}\times 6=10; \quad y = 6$

അഥവാ $x=\frac{180}{3}\times 6=300, \quad y = 180$etc.

ഉദാഹരണം 93

യദ് സ്യാൽ സ്വൽപവധാർധതോ ഘനപദം

യത്വർഗ്ഗയോഗാൽ പദം

യേ യോഗാന്തരയോർ ദ്വികാഭ്യധികയോർ

വർഗ്ഗാന്തരാൽ സാഷ്ടകാൽ

യഃ ചൈതൽപദപഞ്ചകം ച –

മിളിതം സ്യാൽ വർഗ്ഗമൂലപ്രദം

താ രാശീ കഥയാ/ശു നിശ്ചലമതേ ഷട്കാഷ്ടകാഭ്യാം വിനാ

അർത്ഥം

സ്വല്പ വധാർധം - ചെറിയസംഖ്യയും ഗുണിതവും കൂട്ടിയതിന്റെ പകുതി. ഘനപദം - ഘനമൂലം. വർഗ്ഗയോഗാത് പദം - വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയുടെ വർഗ്ഗമൂലം. യോഗാന്തരയോർ ദ്വികാഢ്യധികം - തുകയോടും വ്യത്യാസത്തോടും 2 കൂട്ടിയത്, വർഗ്ഗാന്തരാത് സാഷ്ടകാത് - വർഗ്ഗവ്യത്യാസത്തോടു 8 കൂട്ടിയത്. ചൈതത് പദപഞ്ചകം - ഈ 5 വർഗ്ഗമൂലങ്ങളും, ഷട്കാഷ്ടകാഭ്യാം വിനാ - 6, 8 എന്നിവ കൂടാതെ.

സാരം

രണ്ടു സംഖ്യകളിൽ ചെറിയ സംഖ്യയും അവയുടെ ഗുണിതവും കൂട്ടിയതിന്റെ പകുതിയുടെ ഘനമൂലം, സംഖ്യാ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയുടെ വർഗ്ഗമൂലം സംഖ്യകളുടെ തുകയോടും വ്യത്യാസത്തോടും രണ്ടു വീതം കൂട്ടിയവയുടെ വർഗ്ഗമൂലങ്ങൾ, വർഗ്ഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസത്തോടു 8 കൂട്ടിയതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം എന്നി 5 വർഗ്ഗമൂലസംഖ്യകൾ കൂട്ടിയത്. ഒരു വർഗ്ഗസംഖ്യ യായാൽ ഹേ, നിശ്ചലമതേ, ആ സംഖ്യകൾ 6, 8 എന്നിവ കൂടാതെ എത്രയെന്നു വേഗം പറഞ്ഞാലും.

സംഖ്യകൾ x, y എന്നു സങ്കല്പിക്കുക (y ചെറിയസംഖ്യ)

$$\left[\frac{xy+y}{2}\right]=a^3$$

$x^2 + y^2 = b^2$

$x + y + 2 = c^2$

$x - y + 2 = d^2$

$x^2 - y^2 + 8 = e^2$

$a + b + c + d + e = f^2$

ഇതിനുള്ള നിയമം അടുത്ത കരണസൂത്രത്തിൽ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്.
വർഗ്ഗവ്യത്യാസം വർഗ്ഗമാക്കാൻ ചേർക്കേണ്ടത് =8
യോഗാന്തരങ്ങൾ വർഗ്ഗമാക്കാൻ ചേർക്കേണ്ടത് =2
ഇവയുടെ ഹരണഫലം $= 8 \div 2 = 4$
ഇതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം =2
ഇത് യോഗാന്തരത്തോട് 2 ചേർത്തവയുടെ വർഗ്ഗമൂലങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമാണ്.

അതായത്.

$c - d = 2, \quad c = d + 2$

$(x+y+2) - (x - y + 2) = c^2 - d^2 = 2y = (d+2)^2 - d^2 = 4(d+1)$

$y = 2(d + 1)$

$x = y + d^2 - 2 = (d + 1)2 + d^2 - 2 = d^2 + 2d = d \quad = (d + 2)$

$x^2 - y^2 = e^2 - 8 \qquad x = d(d + 2), \qquad y = 2(d + 2)$

$d^2 (d + 2)^2 - 4(d + 1)^2 = e^2 - 8$

$d^2 (d^2+4d+4) - 4(d^2+2d+1)$

$= d^4 + 4d^3 + 4d^2 - 4d^2 - 8d - 4$

$= d^4 + 4d^3 - 8d - 4$

$e^2 = d^4 + 4d^3 - 8d - 4 + 8$

$= d^4 + 4d^3 - 8d + 4 = (d^2+2d-2)^2$

$e = d^2 + 2d - 2 = (d+1)^2 - 3$

$b^2 = x^2 + y^2 = d^2 (d+2)^2 + 4(d + 1)^2$

$d^2 (d^2+4d+4) + 4 (d^2+2d+1)$

$= d^4 + 4d^3 + 8d^2 + 8d + 4$

$= (d^2 + 2d + 2)^2$

$b = d^2 + 2d + 2 = (d + 1)^2 + 1$

$$a^3 = \frac{xy + y}{2} = \frac{y}{2}(x+1)$$

$$\frac{2}{2}(d+1)(d^2+2d+1) = (d+1)^3$$

$a = d + 1$

$a + b + c + d + e = (d + 1) + (d^2+2d+2) + (d+2) + d + d^2+2d - 2$

$= 2d^2 + 7d + 3 = f^2$

8 കൊണ്ടു ഗുണിക്കുക.

$16d^2 + 56d + 24 = 8f^2$

$= 16d^2 + 56d + 49 - 25 = 8f^2$

സംഖ്യകൾ x, y എന്നായാൽ

$x+y+k=c^2$

$x-y+k=d^2$ എന്നു തന്നാൽ ഇവയിൽ സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം വരുന്ന ഘടകത്തിന്റെ ഒരു വർഗ്ഗമൂലം = d എന്നു ആദ്യം സങ്കല്പിക്കുക.

$x-y=d^2-k$ എന്നു ഉത്തരമാകും

$x^2-y^2+k^1=e^2$ എന്നതിലെ ക്ഷേപകം k^1 എന്നാണ്

$\frac{k^1}{k}$ യുടെ വർഗ്ഗമൂലം കണക്കാക്കുക

$x+y+k$ എന്നതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം c ആയാൽ

$c=d+\sqrt{\frac{k^1}{k}}$

ഇവയിൽ നിന്നു $x+y$, $x-y$ എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ കണക്കാക്കണം. പിന്നീട് x, y എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ കണക്കാക്കാൻ സാധിക്കും. ഈ തത്വം മുൻ ഉദാഹരണത്തിൽ ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇതിന് മറ്റൊരുദാഹരണം കൂടി കൊടുക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 94

രാശ്യോർ യോഗവിയോഗകൌ ത്രിസഹിതൗ വർഗ്ഗൌ ഭവേതാ തയോർ വർഗ്ഗൈക്യം ചതുരൂനിതം രവിയുതം വർഗ്ഗാന്തരസ്യാൽ കൃതിഃ സാല്പം ഘാതദലം ഘനഃ പദയുതിഃ തേഷാം ദ്വിയുക്താകൃതിഃ തൗ രാശീ വദ കോമളാമലമതേ ഷട്സപ്ത ഹി ത്വാപരൌ

അർത്ഥം

ത്രി സഹിതൌ = 3 കൂട്ടിയത്, ചതുരൂനിതം = 4 കുറച്ചത്, രവിയുതം = 12 കൂട്ടിയത്, സാല്പം = ചെറിയ സംഖ്യ കൂട്ടിയത്, ഘാതദലം = ഗുണിതത്തിന്റെ പകുതി, പദയുതി = വർഗ്ഗമൂലങ്ങളുടെ തുക, ദ്വിയുക്താ = രണ്ടു കൂട്ടിയത്, ഷട്സപ്തഹി = 6,7 എന്നിവ തന്നെ, തൂ അപര = മറ്റുള്ളവ.

സാരം

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയോടും വ്യത്യാസത്തോടും 3 കൂട്ടുമ്പോൾ വർഗ്ഗസംഖ്യകളുണ്ടാകുന്നു. സംഖ്യാ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയിൽ നിന്നും 4 കുറച്ചതും, വർഗ്ഗ വ്യത്യാസത്തോടു 12 കൂട്ടിയതും വർഗ്ഗങ്ങളാകുന്നു. അവയുടെ ഗുണിതത്തിന്റെ പകുതിയും അവയിൽ ചെറിയസംഖ്യയും കൂട്ടിയത് ഘനസംഖ്യയാണ്. ഈ മൂലങ്ങളുടെ തുകയോട് 2 കൂട്ടിയതും വർഗ്ഗസംഖ്യകളാകുന്നു. ആ രാശികളിൽ 6,7 എന്നിവ കൂടാതെ മറ്റുള്ളവ, ഹേ കോമളമതേ പറഞ്ഞാലും.

സംഖ്യകൾ x, y എന്നിവയാണെന്നു സങ്കല്പിക്കുക, y ചെറിയ സംഖ്യയാണ്.

$x + y + 3 = a^2$

$x - y + 3 = b^2$

$x^2 + y^2 - 4 = c^2$

$x^2 - y^2 + 12 = d^2$

$\frac{xy}{2} + y = e^3$

$x \pm y$ യുടെ ക്ഷേപകം =3

$x^2 - y^2$ ന്റെ ക്ഷേപകം =12

ഇവയുടെ ഹരണഫലത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം $= \sqrt{\frac{12}{3}} = 2$

$x - y$ ഘടകത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം = b

$x + y$ ഘടകത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം = a

കരണസൂത്രപ്രകാരം a = b + 2 എന്നു കണക്കാക്കണം.

$x - y = b^2 - 3$

$x + y = a^2 -3\ (b+2)^2 - 3 = b^2 + 4b + 1$

$2x = a^2 + b - 6, \quad x = (b+2)^2 + b^2 - 6 = 2(b^2 + 2b - 1)$

$x = b^2 + 2b - 1 = (b + 1)^2 - 2$

$2y = a^2 - b^2 = (b+2)^2 - b^2 = (2b + 2) \times 2$

$y = 2(b+1)$

$x^2 - y^2 + 12 = [(b+1)^2 - 2]^2 - 4(b+1)^2 + 12 = d^2 = [(b+1)^2-4]^2$

$x^2 + y^2 - 4 = c^2, (b^2 + 2b - 1) + 4(b+1)^2 - 4 = (b+1)^4$

$d = (b+1)^2 - 4$

$$c = (b+1)^2$$

$$\frac{xy}{2} + y = \left[(b+1)^2 - 2\frac{(b+1)}{2}2\right] + 2(b+1)$$

$$= (b+1)^3 = e^3$$

$$e = b + 1$$

$a + b + c + d + e + 2 = (b+2) + b + (b+1)^2\ (b+1)^2 - 4 + (b+1) + 2$

$$= 2(b+1)^2 + 3b + 1 = f^2$$

ഇതിനെ കുട്ടക രൂപത്തിൽ എഴുതുക

$$4b^2 + 14b + 6 = 2f^2$$

അഥവാ $16b^2 + 56b + 24 = 8f^2$

$$(4b + 7)^2 - 25 = 8f^2$$

അഥവാ $8f^2 + 25 = (4b + 7)^2 = z^2 (z = 4b + 7)$

ഇനി $8f^2 + 1 = z^2$ കുട്ടകത്തിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഉത്തരം കാണാം.

ഇതിന്റെ മൂല്യം $f = 1, z = 3$ എന്നാകയാൽ

$8f^2 + 25 = z^2$ എന്നതിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ $f = 5, z = 15$ എന്നുമാകും. $z = 15$ എന്നതിൽ നിന്നും $b = 2$ എന്ന മൂല്യം ലഭിക്കും. അതിൽ നിന്നും $x = (b+1)^2 - 2 = 7$

$y = 2(b+1) = 6$ എന്നുമുള്ള മൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കും.

ഇവയല്ലാതെ മറ്റു മൂല്യങ്ങൾ കാണാനാണ് ചോദ്യം ഭാവനാരീതിയിൽ $f = 175, z = 495$ എന്നു മൂല്യങ്ങൾ കണ്ടെത്താനാകും.

അതിൽ നിന്നും b = 122, f = 175 എന്നും ഉത്തരങ്ങൾ ഉണ്ടാകും..

$x = (122)^2 - 2 = 15127,\ y = 2\,(122 + 1) = 246$

a = 124, b = 122 c =15129, d = 15125, e = 123, f = 175 എന്നിവയാണ് ഉത്തരം

ഉദാഹരണം 95

രാശ്യോർ യയോഃ കൃതിയുതി
വിയുതി ചൈകേന സംയുതൗ വർഗ്ഗൗ
രഹിതേ വാ തൗ രാശീ
ഗണയിത്വാ കഥയ യദി വേത്സി

അർത്ഥം

രാശ്യോർ യയോഃ കൃതിയുതി = രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങൾ കൂട്ടിയത്, വിയുതി = വ്യത്യാസം, ച ഏകേന സംയുതം = ഒന്നു കൂട്ടിയത്, രഹിതേ = കുറച്ചത്.

സാരം

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയോടും വ്യത്യാസത്തോടും ഒന്നു കൂട്ടിയതും ഒന്നു കുറച്ചതും വർഗ്ഗസംഖ്യകളാകുന്നു. ആ സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കി അറിയാമെങ്കിൽ പറയുക.

x, y എന്നിവയാണ് സംഖ്യകളെന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

ഇവിടെ രണ്ടു പ്രശ്നങ്ങളാണ് ഉന്നയിച്ചിട്ടുള്ളത്.

a) x^2+y^2+1 = വർഗ്ഗസംഖ്യ

x^2-y^2+1 = വർഗ്ഗസംഖ്യ

b) x^2+y^2-1 = വർഗ്ഗസംഖ്യ

x^2-y^2-1 = വർഗ്ഗസംഖ്യ

a) $x^2+y^2+1=u^2$

$x^2-y^2+1=v^2$ എന്നു സങ്കല്പിക്കുക

$x^2+1=5z^2$ എന്നും $y^2=4z^2$ എന്നും സങ്കല്പിച്ചാൽ

$x^2+y^2+1=9z^2$ എന്നും $x^2-y^2+1=z^2$ എന്നും വർഗ്ഗങ്ങളാകും.

$x^2+1=5z^2$ എന്നത് $5z^2-1=x^2$ എന്ന കുട്ടകമാകും.

z = 1, x = 2 എന്ന മൂല്യങ്ങൾ കുട്ടകത്തിനു യോജിക്കും

$y^2 = 4z^2 = 4$ അതായത് y = 2

x = 2, y = 2 എന്ന ഒരു പ്രാഥമിക മൂല്യം ലഭിക്കും

$5z^2-1=x^2$ എന്നതിന്റെ അടുത്ത മൂല്യങ്ങൾ കാണാൻ

$5z^2+1=x^2$ എന്ന സഹായക കുട്ടകത്തിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ

z = 4, x = 9 എന്ന മൂല്യങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം.

$z=1\times9+2\times4=17$ · $x=5\times1\times4+2\times9=38$

$y^2=4z^2$ അഥവാ y = 2z = 34

x = 38 , y = 34 എന്നത് അടുത്ത മൂല്യങ്ങൾ

b) $x^2+y^2-1=u^2$

$x^2-y^2-1=v^2$

ഇവിടെ $x^2-1=5z^2$, $y^2=4z^2$ എന്നു സങ്കല്പിക്കുക

$5z^2+1=x^2$ എന്ന കുട്ടകത്തിൽ

y = 4, x = 9 എന്ന മൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു.

y = 2z = 8

ഇവിടെ മൂല്യങ്ങൾ x = 9, y = 8

അടുത്ത മൂല്യങ്ങൾ കാണാൻ

$5z^2+1=x^2$ എന്ന കുട്ടകത്തിൽ

$z=2\times4\times9=72$ എന്നും $x=5\times4^2+9^2=161$

y = 2z = 144

x, y യുടെ മറ്റൊരു മൂല്യം x = 161, y = 144

കരണസൂത്രം 60

യത്രാവ്യക്തം സരൂപം ഹി തത്ര തന്മാനമാനയേത്
സരൂപ സ്യാന്യവർണ്ണസ്യ കൃത്വാ കൃത്യാദിനാ സമം
രാശിം തേന സമുത്ഥാപ്യ കുര്യാത് ഭൂയോfപരാം ക്രിയാം
സരൂപേണാന്യ വർണ്ണേന കൃത്വാപൂർവ്വപദം സമം

അർത്ഥം

അവ്യക്തം സരൂപം = സംഖ്യയോടു കൂട്ടിയ അവ്യക്ത ഘടകം തന്മാനം ആനയേത് = അതിന്റെ മൂല്യം കാണുക, അന്യ വർണ്ണസ്യ കൃത്വാ = മറ്റൊരു അവ്യക്തഘടകത്തിന്റെ വർഗ്ഗം, കൃത്യാദിനാ = വർഗ്ഗം മുതലായ, സമുത്ഥാപ്യ = കണ്ടെടുത്ത്, അപരാംക്രിയാം = മറ്റു ക്രിയകൾ, പൂർവ്വപദം = മുമ്പുള്ള വർഗ്ഗമൂലം.

സാരം

സംഖ്യയോടു കൂടിയ അവ്യക്തസംഖ്യ ഒരു വശത്തുണ്ടെങ്കിൽ (മറുവശത്ത് വർഗ്ഗഘടകം ഉണ്ടായിരിക്കണം) അതിന്റെ മൂല്യം കാണാൻ ആ സംഖ്യയോടു കൂട്ടിയ ഘടകത്തിനു പകരം മറ്റൊരു അവ്യക്ത ഘടകം വർഗ്ഗമായി സങ്കല്പിച്ച് വർഗ്ഗാദിക്രിയകളിലൂടെ മൂല്യം കാണുക. ഈ മൂല്യം ഉപയോഗിച്ച് വീണ്ടും ക്രിയ ചെയ്ത് ആ സാങ്കല്പിക ഘടകത്തിന്റെ മൂല്യം ഉപയോഗിച്ച് മൂലസമവാക്യത്തിലെ അവ്യക്ത ഘടകത്തിന്റെ മൂല്യം കാണുക.

ഉദാഹരണം 96

യഃ ത്രിപഞ്ചഗുണോ രാശിഃ പൃഥക് സൈകഃ കൃതിർ ഭവേത്
വദേതം ബീജമദ്ധ്യേഽസി മധ്യമാഹരണേ പടുഃ

അർത്ഥം

ത്രിപഞ്ചഗുണോ രാശിഃ = 3 കൊണ്ടും 5 കൊണ്ടും ഗുണിച്ച സംഖ്യ, പൃഥക് സൈകഃ = വെവ്വേറെ ഒന്നു വീതം കൂട്ടിയത്, കൃതിർ ഭവേത് = വർഗ്ഗമാകുന്നു. വദേതം = അതിനെ പറയുക, പടു = സമർത്ഥൻ

സാരം

ഏതൊരു സംഖ്യയെ 3 കൊണ്ടും 5 കൊണ്ടും ഗുണിച്ചവയോട് ഒന്നു വീതം കൂട്ടിയത് വർഗ്ഗ സംഖ്യയാകുമോ, ആ സംഖ്യ ബീജഗണിതത്തിൽ മധ്യമാഹരണക്രിയയിൽ സമർത്ഥനാണെങ്കിൽ ഏതെന്നു പറയുക.

സംഖ്യ x എന്നു സങ്കല്പിക്കാം.

$3x + 1$ = വർഗ്ഗസംഖ്യ $= a^2$

$5x + 1$ = വർഗ്ഗസംഖ്യ $= b^2$

$3x + 1$ ഒരു വർഗ്ഗസംഖ്യയാകാൻ $x = 3z^2 + 2z$ എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

$3x + 1 = 3(3z^2+2z)+1 = 9z^2+6z+1=(3z+1)^2$

$5x+1$ എന്നതിൽ $x = 3x^2+2z$ എന്നു പകരം ഉപയോഗിക്കുക

$5(3z^2+2z)+1 = 15z^2+10z+1$ എന്നു കിട്ടും.

ഇത് ഒരു വർഗ്ഗസംഖ്യയായിരിക്കണം. സമവാക്യത്തെ 15 കൊണ്ടു ഗുണിക്കുക.

$(15z)^2 +150z + 15 = 15b^2$ എന്നാകും.

$(15z + 5)^2 - 25 + 15 = 15b^2 = (15z + 5)^2 - 10$

$15b^2 + 10 = (15z + 5)^2 = y^2 \quad 15z+5=y$

ഈ കുട്ടകത്തിന് പ്രാഥമിക മൂല്യം $b = 1, y = 5$ എന്നാണ്, $15b^2 + 1 = y^2$ എന്ന സഹായക കുട്ടത്തിൽ നിന്നും $b = 1, y = 4$ എന്നും ലഭിക്കും.

ഭാവനാരീതിയിൽ $15b^2 + 10 = y^2$ എന്നതിന് മറ്റു മൂല്യങ്ങൾ കാണാം

$b = 1\times4+5\times1 = 9, y = 15\times1\times1+5\times4 = 35$

$y = 15z + 5 = 35, z = 2$

ഇതിൽ നിന്നും $x = 3z^2+2z = 3\times4+2\times2 = 16$

ഭാവനാരീതിയിൽ x, y ക്ക് മറ്റൊരു മൂല്യം കാണാം

$15b^2 + 1 = y^2$ എന്നതിൽ $b = 1, y = 4$

$15b^2 + 10 = y^2$ എന്നതിൽ $b=9, y=35$ എന്നും മൂല്യങ്ങൾ ഉണ്ട്.

ഇവയിൽ നിന്നും b യുടെ നൂതന മൂല്യം $= 1\times35+4\times9 = 71$ എന്നും

y യുടെ നൂതന മൂല്യം $= 15\times1\times9x+4\times35 = 275$ എന്നുമാകും.

ഇവിടെ $y = 15z+5 = 275 = z = \frac{270}{15} = 18$

$x = 3\times18^2+2\times18 = 1008$ എന്നു കിട്ടും.

$1008\times3+1 = 3024+1 = 3025 = 55^2$

$1008\times5+1 = 5041 = 71^2$

അതായത് $a = 55$, $b = 71$

സംഖ്യകൾ : 16, 1008 എന്നിവ

ഉദാഹരണം 97

കോ രാശിഃ ത്രിഭിരഭ്യസ്തഃ സരൂപോ ജായതേ ഘനഃ
ഘനമൂലം കൃതീഭൂതം ത്ര്യഭ്യസ്തം കൃതിരേകയുക്

അർത്ഥം

ത്രിഭിരഭ്യസ്തം = 3 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, സരൂപോ = ഒന്നു കൂട്ടിയത്, കൃതീഭൂതം = വർഗ്ഗമാക്കി, ത്ര്യഭ്യസ്തം = 3 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, ഏകയുക് = ഒന്നുകൂട്ടിയത്

സാരം

ഏതു സംഖ്യയെ 3 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഒന്നു കൂട്ടിയതു ഒരു ഘനസംഖ്യയും, ആ സംഖ്യയുടെ ഘനമൂലത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തെ 3 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഒന്നു കൂട്ടിയത് ഒരു വർഗ്ഗസംഖ്യയുമാകുന്നു.

സംഖ്യ x എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

$3x + 1 =$ ഘനസംഖ്യ $-a^3$ ഘനമൂലം $= a$

$3x$ ഘനമൂല വർഗ്ഗം $+ 1 = 3a^2 + 1$ വർഗ്ഗസംഖ്യ $= b^2$

$3a^2 + 1 = b^2$ എന്നതിന് $a = 1, b = 2$

$a = 4, b = 7$ എന്നും മൂല്യങ്ങളുണ്ട്

ഇവയിൽ $a = 4$ എന്നത് ഉപയോഗിച്ച് $a^3 = 64$ എന്നു കിട്ടുന്നു.

$3x + 1 = 64$ ആകുമ്പോൾ $x = 21$ എന്ന് ഉത്തരം

xന്റെ മറ്റൊരു മൂല്യം $\frac{3374}{3}$.അതിൽ നിന്നും $a = 15, b = 26$

ഉദാഹരണം 98

വർഗ്ഗാന്തരം കഃയോ രാശ്യോഃ പൃഥക് ദ്വിത്രിഗുണം ത്രിയുക്
വർഗ്ഗൌ സ്യാതാം വദ ക്ഷിപ്രം ഷട്ക പഞ്ചകയോരിവ

അർത്ഥം

കയോരാശ്യോ വർഗ്ഗാന്തരം = ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം, പൃഥക് = വെവ്വേറെ, ദ്വിത്രിഗുണം = 2,3 എന്നിവ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്, ത്രുയുക് = 3 കൂട്ടിയത്, വർഗ്ഗൌ സ്യാൽ = വർഗ്ഗങ്ങളാകുന്നു, ഷട്ക പഞ്ചകയോരിവ = 6, 5 എന്നിവ കൂടാതെ.

സാരം

ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസത്തെ 2,3 എന്നിവ കൊണ്ടു വെവ്വേറെ ഗുണിച്ചവയോട് 3 കൂട്ടിയാൽ വർഗ്ഗസംഖ്യകളാകുന്നു? അവയിൽ 6,5 എന്നിവയ്ക്ക് പുറമേ മറ്റു മൂല്യങ്ങൾ വേഗം പറഞ്ഞാലും.

സംഖ്യകൾ x, y എന്നിവയാണെന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

വർഗ്ഗാന്തരം $x^2 - y^2$

$2(x^2 - y^2) + 3 = u^2$

$3(x^2 - y^2) + 3 = v^2$

$x^2 - y^2 = z$ എന്നു സങ്കല്പിക്കുക

$2z + 3 = u^2$ (A)

$3z + 3 = v^2$ (B)

(A) യെ 3 കൊണ്ടും (B) യെ രണ്ടു കൊണ്ടും ഗുണിച്ച് വ്യത്യാസം കാണുമ്പോൾ ഘടകം ഒഴിവാകും.

$6z + 9 = 3u^2$

$6z + 6 = 2v^2$

$3u^2 - 2v^2 = 3$

അഥവാ $3u^2 = 2v^2 + 3$

ഇതിനെ വർഗ്ഗമാക്കാൻ 3 കൊണ്ടു ഗുണിക്കുക

$6v^2 + 9 = 9u^2 = (3u)^2$

ഈ കുട്ടകത്തിന്റെ സഹായക കുട്ടകം

$6v^2 + 1 = (3u)^2$ എന്നതാണ്

ഇതിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ $v = 2, 3u = 5$

അഥവാ $v = 20, 3u = 49$ എന്നിങ്ങനെ ലഭിക്കുന്നു.

ഇതിൽ നിന്നും $6v^2 + 9 = (3u)^2$ എന്ന കുട്ടകത്തിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ $v = 6$

$3u = 15$ അഥവാ $v = 60, 3u = 147$ എന്നും ആകുന്നു.

$u = 49$ $2z + 3 = u^2$ അഥവാ

$3z + 3 = v^2$ എന്നതിൽ നിന്നും $(v = 6)$ $(v = 60)$

$3z + 3 = 36$, അഥവാ $= 3600$ എന്നും ലഭിക്കുന്നു.

$$z = \frac{36-3}{3} = 11 \quad \text{അഥവാ} \quad \frac{3600-3}{3} = 1199$$

$x^2 - y^2 = 11$ ആയാൽ $x = 6, y = 5$ എന്ന ചോദ്യത്തിൽ തന്നിരിക്കുന്ന മൂല്യങ്ങളാണ് ലഭിക്കുക. അടുത്ത മൂല്യങ്ങൾ കാണാൻ

$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1199}{m} + m\right)$ എന്നും $y = \frac{1}{2}\left(\frac{1199}{m} - m\right)$ എന്നും ഉള്ളതിൽ

$m = 2, 3, 4$ എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് x, y യുടെ വിവിധ ഉത്തരങ്ങൾ കാണാം. ഇവയിൽ നിന്ന് പൂർണ്ണസംഖ്യാമൂല്യങ്ങൾ ലഭ്യമല്ല.

$m = 1$ ആയാൽ $x = 6, y = 5$ എന്നാകും

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1199}{m} + m\right), y = \frac{1}{2}\left(\frac{1199}{m} - m\right)$$

എന്നിവയിൽ $m = 11$ ആയാൽ

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1199}{11} + 11\right) = 60$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{1199}{11} - 11\right) = 49$$

$m = 1$ ആയാൽ

$$x = \frac{1}{2}(1199 + 1) = 600$$

$$y = \frac{1}{2}(1199 - 1) = 599$$

എന്നുമുള്ള മൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കും.

കരണസൂത്രം 61

കചിത് ആദേഃ കചിത് മധ്യാത് കചിത് അന്ത്യാൽ ക്രിയാബുധൈഃ ആരഭ്യതേ യഥാ ലഘ്വി നിർവ്വഹേത് ച യഥാ തഥാ

അർത്ഥം

കചചിൽ = ചിലപ്പോൾ, ലഘ്വി നിർവ്വഹേത് = ലളിതമായ രീതിയിൽ

സാരം

ചിലപ്പോൾ ആദ്യം മുതലും, ചിലപ്പോൾ മധ്യം മുതലും ചിലപ്പോൾ അവസാനം മുതലും ക്രിയകൾ ലഘുവാകുന്നവിധം ബുദ്ധിമാന്മാർ നിർദ്ധാരണം ആരംഭിക്കുന്നു.

കരണസൂത്രം 62

വർഗ്ഗാദേർ യോ ഹരഃ തേന ഗുണിതം യദി ജായതേ
അവ്യക്തം തത്ര തന്മാനം അഭിന്നം സ്യാദ് യഥാ തഥാ
കല്പ്യോƒന്യ വർണ്ണ വർഗ്ഗാദിഃ തുല്യം ശേഷം യഥോക്തവൽ

അർത്ഥം

വർഗ്ഗാദേർ യോ ഹരഃ = വർഗ്ഗാദികളുടെ ഹാരം, തേനഗുണിതം = അതിന്റെ ഗുണിതം, അഭിന്നം = പൂർണ്ണസംഖ്യ.

സാരം

വർഗ്ഗസംഖ്യയുടെ ഗുണകാരം കൊണ്ട് ഗുണിച്ചു ഒരു അവ്യക്ത സംഖ്യയെ വർഗ്ഗമാക്കി മാറ്റി അഭിന്ന സംഖ്യയായി മൂല്യം ലഭിക്കുന്ന വിധം മറ്റൊരു അവ്യക്ത ഘടകത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തിനു തുല്യമായി കണക്കാക്കുക. മറ്റു ക്രിയകൾ മുമ്പു പറഞ്ഞ പ്രകാരം ചെയ്യുക.

ഉദാഹരണം 99

കോവർഗ്ഗഃ ചതുരൂനഃ സത് സപ്തഭക്തോ വിശുധ്യതി
ത്രിംശദൂനോƒഥവാ കഃ തം യദി വേത്സി വദ ദ്രുതം

അർത്ഥം

ചതുരൂന = 4 കുറച്ചത്, സപ്തഭക്തോ = 7 കൊണ്ടു ഹരിച്ചത്, വിശുധ്യതി = ശിഷ്ടമില്ലാതാകുന്നു, ത്രിംശദൂനോ = 30 കുറച്ചത്.

സാരം

ഏതു വർഗ്ഗത്തിൽ നിന്നും 4 കുറച്ച് 7 കൊണ്ടു ശിഷ്ടമില്ലാതെ ഹരിക്കാനാകും. അഥവാ വർഗ്ഗത്തിൽ നിന്നും 30 കുറച്ചതും ശിഷ്ട മില്ലാതെ (7 കൊണ്ടു) ഹരിക്കാനാകുമെന്ന് അറിയാമെങ്കിൽ വേഗം പറയുക.

ഇവിടെ 2 ചോദ്യങ്ങളാണുള്ളത്.

സംഖ്യ = x എന്നു സങ്കല്പിക്കുക. $x^2 - 4 = 7y$ എന്നും $x^2 - 30 = 7y$ എന്നുമാണ് അവ.

$x^2 - 4 = 7y$ അഥവാ $7y + 4 = x^2$

ഈ ചോദ്യത്തിനുള്ള ഉത്തരം കാണാനുള്ള നിയമം അടുത്ത കരണസൂത്രത്തിൽ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്. അതിൻ പ്രകാരം $by + c = x^2$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ $x = bz + \sqrt{c}$ എന്നും $y = bz^2 + 2z\sqrt{c}$ എന്നുമായിരിക്കും മൂല്യങ്ങൾ. c ഒരു വർഗ്ഗസംഖ്യ യായാൽ മാത്രമേ x, y മൂല്യങ്ങൾ പൂർണ്ണസംഖ്യകളാകൂ. അതിനു വേണ്ട മാറ്റങ്ങൾ ചോദ്യത്തിൽ വരുത്താവുന്നതാണ്.

$x^2 - 4 = 7y$ എന്നത് $7y + 4 = x^2$ എന്ന കുട്ടകമാക്കാം.

$x = 7z + \sqrt{4} = 7z + 2$ എന്നും $y = 7z^2 + 2\sqrt{4}z$ എന്നും ഉത്തരങ്ങളാകും. ഇതനുസരിച്ച്

$z = 1$ ആയാൽ $x = 9,\ y = 11$

$z = 2$ ആയാൽ $x = 16,\ y = 36$ എന്നും മറ്റും മൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കും.

$x^2 - 30 = 7y$ എന്നത് $7y + 30 = x^2$ എന്നായി മാറും

ഇതിലെ ക്ഷേപകത്തിനെ ഒരു വർഗ്ഗസംഖ്യയാക്കി മാറ്റാൻ അതിൽ നിന്നും 7 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ കുറച്ചാൽ മതി $30 - 14 = 16$ എന്ന ക്ഷേപകവും ചോദ്യത്തിനു യോജ്യമാകും. അതായത്

$7(y+2) + 16 = x^2 \qquad x = 7z + \sqrt{16},\ y + 2 = 7z^2 + 2z\sqrt{16}$

$z = 1,\ x = 11,\ y = 13$

$z = 2,\ x = 18,\ y = 42$ എന്നിങ്ങനെ ഉത്തരങ്ങൾ ലഭിക്കും.

കരണസൂത്രം 63

ഹരഭക്താ യസ്യകൃതിഃ ശുദ്ധ്യതി സോഽപി ദ്വിരൂപ പദഗുണിതഃ
തേനാഽഹതോഽന്യവർണ്ണോ രൂപ പദേനാന്വിതഃ കല്പ്യഃ
ന യദി പദം രൂപാണാം ക്ഷേപേന്തരം തേഷു ഹാര തഷ്ടേഷു
താവത് യാവത് വർഗ്ഗോ ഭവതി ന ചേൽ ഏവമപി ഖിലം തർഹി
ഹത്വാ ക്ഷിപ്ത്വാ ച പദം യത്രാദ്യസ്യേഹ ഭവതി തത്രാപി
ആലാപിത ഏവ ഹരോ രൂപാണി തു ശോധനാനി സിദ്ധാനി.

അർത്ഥം

ഹരഭക്താ യസ്യകൃതിഃ ശുദ്ധ്യതി = ഏതു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗത്തെ ഹാരകം കൊണ്ടു പൂർണ്ണമായി ഹരിക്കാമോ,

ദ്വിരൂപ പദം = ക്ഷേപകത്തിന്റെ മൂല്യത്തിന്റെ ഇരട്ടി, തേന ആഹതോ = അതു കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്, രൂപപദാന്വിതം = ക്ഷേപകമൂലം കൂട്ടിയത്, യദി രൂപാണാം പദം ന = ക്ഷേപക മൂലം ലഭ്യമല്ലെങ്കിൽ, ക്ഷേപേദ്ധരം = ക്ഷേപകത്തെ ഹരിച്ചത്, ഹാരതഷ്ടം = ഹാരം കൊണ്ടു ലഘൂകരിച്ചത്, വർഗ്ഗോഭവതി = വർഗ്ഗമാകുന്നു, ഖിലം തർഹി = ഉദാഹരണം നിർദ്ധാരണ വിധേയമല്ല, ഹത്വാക്ഷിപ്ത്വാ = ഗുണിച്ചോ കുറച്ചോ

സാരം

ഏതു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗത്തെ ഹാരകം കൊണ്ടു ശുദ്ധ മായി ഹരിക്കാമോ, അതിനെ ക്ഷേപകത്തിന്റെ മൂല്യത്തിന്റെ രണ്ടിരട്ടി കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് അന്യവർണ്ണത്തെ ഗുണിച്ചതിനോട് ക്ഷേപകമൂലം ചേർത്ത് അന്യപക്ഷമൂലമായി സങ്കല്പിക്കുക.

ക്ഷേപകമൂലം ലഭ്യമല്ലെങ്കിൽ ക്ഷേപകത്തെ ഹാരകം കൊണ്ടു തക്ഷണം ചെയ്ത് വർഗ്ഗസംഖ്യയാക്കുക. ഇതു അസാധ്യമായാൽ പ്രശ്നത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം (പൂർണ്ണസംഖ്യ യിൽ) അസാധ്യമാണ്.

ആദ്യപക്ഷത്തെ ഗുണിച്ചോ കുറച്ചോ വർഗ്ഗമൂലം കാണാൻ കഴിയുമെങ്കിൽ അതേഹാരകത്തിനു അനുയോജ്യമായി ക്ഷേപകം രൂപപ്പെടുത്തുക.

ഇവിടെ $x^2 = by + c$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള സമവാക്യങ്ങളാണ് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യേണ്ടത് x^2 ഒരു വർഗ്ഗസംഖ്യയാകയാൽ $by + c$ വർഗ്ഗസംഖ്യയാകണം. ഇതിന് $y = bz^2 + 2z\sqrt{c}$

$$by + c = b^2z^2 + 2bz\sqrt{c} + c = (bz + \sqrt{c})^2$$ എന്നാകും.

അതിൽ നിന്നും $x = bz + \sqrt{c}$ എന്ന് ഉത്തരമാകും.

ഇവിടെ c ഒരു വർഗ്ഗ സംഖ്യയായിരിക്കണം. എങ്കിൽ മാത്രമേ $\sqrt{c}$ കണക്കാക്കാനാകൂ. ക്ഷേപകം c യെ b കൊണ്ടു ഹരിച്ചു കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടത്തോട് b യുടെ ഒരു ഗുണിതം ചേർത്തു വർഗ്ഗമാക്കാൻ പറ്റുമെങ്കിൽ അപ്രകാരം ചെയ്യുന്നത് x ന്റെ മൂല്യത്തിനു മാറ്റം വരുത്തുകയില്ല. ഹരണഫലം y ൽ മാത്രമേ വ്യത്യാസം ഉണ്ടാക്കൂ. ഇപ്രകാരം ക്ഷേപകം രൂപാന്തരപ്പെടുത്തുവാൻ സാധ്യമല്ലെങ്കിൽ തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തിന് പൂർണ്ണസംഖ്യാ മൂല്യങ്ങൾ ലഭ്യമല്ല എന്നു കരുതാം. ഇടതു വശത്ത് x^2 എന്നതിനു പകരം $x^2 +$

$2x$ എന്നോ മറ്റോ ആയാൽ അത് പൂർണ്ണ വർഗ്ഗമാക്കാനുള്ള മാറ്റങ്ങൾ ഇരുവശത്തും വരുത്തേണ്ടതാണ്.

ഉദാഹരണം 100

ഷഡ്ഭിരൂനോ ഘനഃ കസ്യ പഞ്ചഭക്തോ വിശുദ്ധ്യതി
തം വദാസ്തി തവാലം ചേൽ അഭ്യാസോ ഘന കുട്ടകേ

അർത്ഥം

ഷഡ്ഭിരൂനോ = 6 കുറച്ചത്, പഞ്ചഭക്തോ = 5 കൊണ്ടു ഹരിച്ചത്

സാരം

ഒരു ഘനസംഖ്യയിൽ നിന്നും 6 കുറച്ചത് 5 കൊണ്ടു നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാമെങ്കിൽ ആ സംഖ്യ ഏതെന്ന് അങ്ങ് ഘന കുട്ടകത്തിൽ നിപുണനാണെങ്കിൽ പറഞ്ഞാലും.

തന്നിരിക്കുന്ന കാര്യങ്ങൾ

അജ്ഞാത സംഖ്യ x എന്നായാൽ

$x^3 - 6 = 5$ കൊണ്ടു നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന സംഖ്യയാണ്.

അതായത് $x^3 - 6 = 5y$ അഥവാ $5y + 6 = x^3$

ഇതിനെ രൂപഭേദപ്പെടുത്തിയത് $5y - 210 + 216 = x^3$

$5(y - 42) + 216 = x^3$

$(216) = 6^3$ ആണ്

$x = 5z + 6$ എന്നു സങ്കല്പിക്കുക

$x^3 = 125z^3 + 450z^2 + 540z + 216$ എന്നു കരുതുക

$5(y - 42) = 125z^3 + 450z^2 + 540z$ എന്നു കരുതുക

$y - 42 = 25z^3 + 90z^2 + 108z$

$z = 1$ ആയാൽ

$y - 42 = 25 + 90 + 108 = 223$

$y = 265$

$x = 5 \times 2 + 6 = 16$

$x = 11, y = 256$

$z = 2$ എന്നു സങ്കല്പിച്ചാൽ

$y = 200 + 360 + 216 + 42 = 818$

$x = 5 \times 2 + 6 = 16$

ഇപ്രകാരം മറ്റു മൂല്യങ്ങളും കാണാം.

ഉദാഹരണം 101

യദ് വർഗ്ഗഃ പഞ്ചഭിഃ ക്ഷുണ്ണോഃ ത്രിയുക്തഃ ഷോഡശോദ്ധൃതഃ ശുദ്ധിമേതി സമാചക്ഷ്വ ദക്ഷോ fസി ഗണിതേ യദി

അർത്ഥം

പഞ്ചഭിക്ഷുണ്ണോ = 5 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്, ത്രിയുക്തം =3 കൂട്ടിയത്, ഷോഡശോദ്ധൃത = 16 കൊണ്ടു ഹരിച്ചത്, ശുദ്ധിം ഇതി = ശിഷ്ടമില്ലാത്തതാകുന്നു. ആചക്ഷ്വ = പറഞ്ഞാലും. ദക്ഷൻ = വിദഗ്ദ്ധൻ

സാരം

ഏതു സംഖ്യാ വർഗ്ഗത്തെ 5 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 3 കൂട്ടിയാൽ 16 കൊണ്ട് പൂർണ്ണമായി ഹരിക്കാമോ, ആ സംഖ്യ, ഗണിതത്തിൽ അങ്ങ് വിദഗ്ദ്ധനാണെങ്കിൽ പറഞ്ഞാലും.

നിർദ്ദിഷ്ടസംഖ്യ x എന്നു കരുതുക

$5x^2 + 3 = 16y$ എന്ന സമവാക്യം $5x^2 = 16y - 3$ എന്ന് എഴുതാം.

ഇടതുവശത്തെ സംഖ്യ പൂർണ്ണവർഗ്ഗമല്ല. അതിനാൽ ഇരുവശവും 5 കൊണ്ടു ഗുണിക്കുക.

$25x^2 = 80y - 15 = (5x)^2$

$80y - 15$ എന്നതിലെ ക്ഷേപകം -15 എന്നത് ഒരു വർഗ്ഗ സംഖ്യയല്ല.

ഹാരകമായ 80 ന്റെ 3 ഇരട്ടി ക്ഷേപകത്തോടു ചേർക്കുക.

$80y - 15 + 240 = 80(y-3) + 225$ എന്നാകുന്നു

$(5x)^2 = 80(y-3) + 225$ എന്ന കുട്ടകത്തിൽ $b = 80, \sqrt{c} = 15$

ഇതിൽ നിന്നും $5x = 80z + 15,\ y - 3 = 80z^2 + 30z$

$z = 1$ ആയാൽ $5x = 95,\ x = 19,\ y = 110 + 3 = 113$

$z = 2$ ആയാൽ $x = 35,\ y = 383$

$z = \frac{1}{2}$ ആയാൽ $x = 11,\ y = 38$

$z = -\frac{1}{2}$ ആയാൽ $x = 5,\ y = 8$

അദ്ധ്യായം 11

ഭാവിതം

രണ്ട് അവ്യക്ത സംഖ്യകളുടെ ഗുണിതം (xy) ഭാവിതമെന്ന് പറയപ്പെടുന്നു. ഒരു സമീകരണത്തിൽ അത്തരം ഘടകങ്ങളുണ്ടായാൽ അതിനെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുവാനുള്ള മാർഗ്ഗം ഇവിടെ വിവരിക്കുന്നു.

കരണസൂത്രം 64

മുക്തേഷ്ട വർണ്ണം സുധിയാ പരേഷാം
കല്പ്യാനി മാനാനി യഥേപ്സിതാനി
തഥാ ഭവേത് ഭാവിത ഭഗ്ന ഏവം
സ്യാൽ ആദ്യ ബീജക്രിയയേഷ്ട സിദ്ധിഃ

അർത്ഥം

മുക്തഷ്ട വർണ്ണം = ഒരു അവ്യക്ത ഘടകം ഒഴികെയുള്ളവ, സുധിയാ = ബുദ്ധിപൂർവ്വം, പരേഷാം = മറ്റുള്ളവയുടെ, മാനാനി = മൂല്യങ്ങൾ, യഥേപ്സിതം = ഇഷ്ടപ്രകാരം, ഭാവിത ഭഗ്ന= ഭാവിതത്തെ ഒഴിവാക്കി

സാരം

നിർദ്ദിഷ്ട സമവാക്യത്തിൽ ഒരു അവ്യക്തഘടകം ഒഴിച്ച് മറ്റുള്ളവയ്ക്ക് ബുദ്ധിപൂർവ്വം ഇഷ്ടമുള്ള സംഖ്യ സങ്കല്പിക്കുക. അപ്രകാരം ഭാവിതം ഒഴിവാക്കി ബീജക്രിയയിലൂടെ ഇഷ്ടസംഖ്യ കാണുക.

ഉദാഹരണം 102

ചതുഃത്രിഗുണയോ രാശ്യോ സംയുതിഃ ദ്വിയുതാ തയോഃ
രാശി ഘാതേന തുല്യാ സ്യാൽ തൗ രാശീ വേത്സിചേൽ വദ

അർത്ഥം

ചതുഃത്രിഗുണയോരാശി = 4, 3 എന്നിവകൊണ്ടു ഗുണിച്ച സംഖ്യകൾ, സംയുതി = തുക, ദ്വിയുതാ = 2 കൂട്ടിയത്, രാശിഘാതം = സംഖ്യാഗുണിതം

സാരം

രണ്ടു സംഖ്യകളെ യഥാക്രമം 4, 3 എന്നിവ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു രണ്ടു കൂട്ടിയത് സംഖ്യാ ഗുണിതത്തിനു തുല്യമായാൽ

ആ സംഖ്യകൾ അറിയുമെങ്കിൽ പറയുക.

സംഖ്യകൾ x, y എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

$4x + 3y + 2 = xy$ എന്നാണ് സമവാക്യം

ഇടതുവശത്തുനിന്നും 3y ഒഴിവാക്കി ശേഷിച്ചത് $4x + 2$ എന്നാണ് ഇനി ഒഴിവാക്കിയ ഘടകത്തിന്റെ ഗുണകാരം x ന്റെ മൂല്യമായെടുക്കുക. $x = 3$ ആകുമ്പോൾ $4x + 2 = 14$ എന്നു കിട്ടുന്നു.

ഇഷ്ടസംഖ്യ a എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

$x = \frac{14}{a} + 3$ എന്നും $y = a + 4$ എന്നും മൂല്യങ്ങൾ കാണാം

$a = 1 \quad x = 17 \; y = 5$

$a = 2 \quad x = 10 \; y = 6$

$a = 7 \quad x = 5 \; y = 11$

ഇപ്രകാരം മൂല്യ നിർണ്ണയം ചെയ്യാം

ഉദാഹരണം 103

ചത്വാരോ രാശയഃ കേ തേ യദ്യോഗോ നഖസംഗുണഃ
സർവ്വരാശി ഹതേഃ തുല്യാ ഭാവിതജ്ഞ നിഗദ്യതാം

അർത്ഥം

ചത്വാരോ രാശയഃ = 4 സംഖ്യകൾ, യോഗം = തുക, നഖസംഗുണ = 20 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്, സർവ്വരാശി ഹതേ = എല്ലാ സംഖ്യകളും തമ്മിൽ ഗുണിച്ചത്, നിഗദ്യതാം = പറഞ്ഞാലും.

സാരം

ഏതുനാലു സംഖ്യകളുടെ തുകയെ 20 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത് അവയുടെ ഗുണിതത്തിനു തുല്യമാണോ, ഹേ ഭാവിതജ്ഞ, അവ ഏതെന്നു പറഞ്ഞാലും.

സംഖ്യകൾ a ,b, c, d എന്നിങ്ങനെ സങ്കല്പിക്കുക.

$20(a + b + c + d) = abcd$

ഇവിടെ a, b, c എന്നിവയ്ക്ക് 3, 4, 5 എന്നു മൂല്യങ്ങൾ സങ്കല്പിക്കുക.

$a+b+c = 12$, $abc = 60$ ഇതിൽ നിന്നും

$20(12 + d) = 60d$

$20d + 12 \times 20 = 60d$

$40d = 12 \times 20$, $d = 6$ എന്നു ലഭിക്കുന്നു.

ഈ സമവാക്യത്തിനു യോജിക്കുന്നവ =3, 4, 5, 6 എന്നീ മൂല്യങ്ങളാകും. മൂന്നു ഘടകങ്ങളുടെ മൂല്യം സങ്കല്പിച്ച് നാലാമത്തേതിന്റെ മൂല്യം കണക്കാക്കാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം 104

യൗ രാശീ കില യാ ച രാശി നിഹതിഃ
യൗ രാശി വർഗ്ഗൌ തഥാ
തേഷാം ഐക്യ പദം സ രാശിയുഗളം
ജാതം ത്രയോ വിംശതിഃ
പഞ്ചാശത് ത്രിയുതാഥവാ വദ കിയത്
തദ് രാശിയുഗ്മം പൃഥക്
കൃത്വാfഭിന്നമവേഹി വേത്സി ഗണക,
കഃ ത്വൽ സമോfസ്തി ക്ഷിതൌ

അർത്ഥം

യൗരാശി = ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകൾ, രാശി നിഹതി = സംഖ്യാഗുണിതം, തേഷാം ഐക്യപദം = അവയുടെ തുകയുടെ വർഗ്ഗമൂലം, സ രാശിയുഗളം = ആ രണ്ടു സംഖ്യകളും കൂട്ടിയത്, ത്രയോ വിംശതി = 23, പഞ്ചാശത് ത്രിയുതം = 50+3=53, അഭിന്നം = പൂർണ്ണസംഖ്യ

സാരം

ഏതു രണ്ടു രാശികളും അവയുടെ ഗുണിതവും വർഗ്ഗങ്ങളും കൂട്ടിയതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലത്തോട് ആ സംഖ്യകളും കൂട്ടിയത് 23 അഥവാ 53 ആകുന്നുവോ അവ ഏതു അഭിന്നസംഖ്യകളെന്ന് വെവ്വേറെ ഹേ ഗണിതജ്ഞ പറഞ്ഞാലും. ഇതിന്റെ നിർദ്ധാരണ രീതി അടുത്ത കരണസൂത്രത്തിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളാണ് ഇവിടെ തന്നിരിക്കുന്നത്.

1) $\sqrt{x+y+xy+x^2+y^2}+x+y=23$

2) $\sqrt{x+y+xy+x^2+y^2}+x+y=53$

ഒന്നാമത്തെ സമവാക്യം പരിശോധിക്കാം.
വർഗ്ഗമൂല ഘടകം ഒരു ഭാഗത്താക്കി ഇരുഭാഗങ്ങളുടെ വർഗ്ഗം കാണുക

$x+y+xy+x^2+y^2=[23-(x+y)]^2$

ഇതിൽ നിന്നും ഇരുഭാഗത്തേയും തുല്യ ഘടകങ്ങൾ ഒഴിവാക്കിയ ശേഷം ലഭിക്കുന്നത്.

$47(x+y) - xy = 23^2$

$47x + 47y - 529 = xy$ ഭാവിതം

$x = -47$ എന്നും $47x - 529 = xy$ എന്നും കരുതുക.

$p = 47 \times 47 - 529 = 1680$

ഇഷ്ടസംഖ്യ = a എന്നു സങ്കല്പിക്കുക

$x = \frac{p}{a} + 47$ $y = a + 47 =$

a = -40 ആയാൽ $x = -42 + 47 = 5$, $y = -40 + 47 = 7$

a = -60 ആയാൽ $x = 19$, $y = -13$ എന്നും ഉത്തരമാകും.

a = -40 ആയാൽ $x = 89$, $-y = 87$

$\sqrt{5+7+35+25+49} + 5 + 7 = 23$

b) രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യം

$\sqrt{x+y+xy+x^2+y^2} + x + y = 53$

ഇവിടെ വർഗ്ഗങ്ങൾ കാണുമ്പോൾ

$x + y + xy + x^2 + y^2 = (53-(x+y))^2$

$(x+y)^2 + (x+y) - xy = (x+y)^2 - 106(x+y) + 53^2$

$107(x+y) - 53^2 = xy$

$p = 107 \times 107 - 53^2 = 160 \times 54$

$x = \frac{p}{\Delta} + 107$ $y = \Delta + 107$

$\Delta = -90$ ആയാൽ $x = \frac{160 \times 54}{-90} + 107 = -96 + 107 = 11$

$y = -90 + 107 = 17$

$\sqrt{11+17+11 \times 17+11^2+17^2} + 11 + 17 = 25 + 28 = 53$

$\Delta = -80$ ആയാൽ $x = -1$, $y = 27$ എന്നും മൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കും

$x + y = 26$, $xy = -27$

$\sqrt{26-27+1+27^2} + 26 = 53$ $\Delta = -90$ ആയാൽ $x=203, y=197$

കരണസൂത്രം 65

ഭാവിതം പക്ഷതോ/ഭിഷ്ടാത് ത്യക്ത്വാ വർണ്ണൌ സരൂപകൌ
അന്യതോ ഭാവിതാങ്കേന തതഃ പക്ഷൌ വിഭജ്യ ച
വർണ്ണാങ്ക ഹതിരൂപൈക്യം ഭക്തേത്വാഷ്ടേനേ ഷ്ട തൽഫലേ
ഏതാഭ്യാം സംയുതാ വൂനൌ കർത്തവ്യൌ സ്വേച്ഛയാ ച തൌ
വർണ്ണാങ്കൌ വർണ്ണയോർമാനേ ജ്ഞാതവ്യേ തേ വിപര്യയാത്

അർത്ഥം

പക്ഷതൗ = പക്ഷത്തിൽ നിന്നും, ഭാവിതാങ്കം = ഭാവിതത്തിന്റെ ഗുണകാരം, വർണ്ണാങ്കഹതിരൂപൈക്യം = അവ്യക്തഘടകങ്ങളുടെ ഗുണകാര ഗുണിതവും സംഖ്യയും കൂട്ടിയത്, ഭക്തേത്വഷ്ടേന = ഇഷ്ടസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിക്കുക, സംയുതാഊനാ = കൂട്ടുകയും കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്ത്, വർണ്ണയോർമാനം = അവ്യക്ത മൂല്യങ്ങൾ.

സാരം

ഭാവിതഘടകം ഒരു വശത്തും സംഖ്യകളോടു ചേർന്ന മറ്റു ഘടകങ്ങൾ മറുവശത്തുമാക്കി സമവാക്യം എഴുതുക.

ഭാവിതത്തിന്റെ ഗുണകാരം കൊണ്ട് ഇരുവശത്തും ഹരിക്കുക. അവ്യക്ത ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണകാരങ്ങൾ ഗുണിച്ച് അക്കസംഖ്യയും കൂട്ടുക. ഈ തുകയെ ഇഷ്ട സംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിക്കുക. ഈ ഹരണഫലത്തോടും ഇഷ്ടസംഖ്യയോടും ഘടകഗുണകാരങ്ങൾ വെവ്വേറെ കൂട്ടുകയും കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്യുക. ഇപ്രകാരം അവ്യക്തഘടക മൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 105

ദ്വിഗുണേന കയോ രാശ്യോർഘാതേന സദൃശം ഭവേത്
ദശേന്ദ്ര ഹത രാശൈക്യം ദ്വ്യൂന ഷഷ്ടി വിവർജ്ജിതം

അർത്ഥം

ദ്വിഗുണേന = 2 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച, രാശ്യോർഘാതം = സംഖ്യാ ഗുണിതം, സദൃശം = സമമായത്, ദശേന്ദ്രാഹതം = (ദശം = 10, ഇന്ദ്രൻ = 14) 10,14 എന്നിവകൊണ്ടുഗുണിച്ചത്, ദ്വ്യൂനഷഷ്ടി = രണ്ടു കുറവായ 60 = 58, വിവർജ്ജിതം = കുറച്ചത്.

സാരം

ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണിതത്തിന്റെ ഇരട്ടി, ആ സംഖ്യകളെ യഥാക്രമം 10, 14 എന്നിവ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച

തുകയിൽ നിന്നും 58 കുറച്ചതിനു തുല്യമാകുന്നുവോ, ആ സംഖ്യകൾ കാണുക.

സംഖ്യകൾ x, y എന്നു സങ്കല്പിക്കുക

$2xy = 10x + 14y - 58$

സംഖ്യാഗുണിതത്തിന്റെ ഗുണകാരമായ 2 കൊണ്ട് ഇരുഭാഗവും ഹരിക്കുക.

$xy = 5x + 7y - 29$

അവ്യക്ത ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണകാര ഗുണിതവും അക്കസംഖ്യയും കൂട്ടുക.

$5\times7-29=6$

ഇഷ്ടസംഖ്യ a എന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

$$y=\frac{6}{a}+5, x=a+7$$

a = 1 ആയാൽ y = 11, x = 8

a = 3 ആയാൽ

$$y=\frac{6}{3}+5=7, x=3+7=10$$

a = 2 ആയാൽ

$$y=\frac{6}{2}+5=8, x=2+7=9$$

a = 6 ആയാൽ, y = 6, x = 13

ഇപ്രകാരം അനേകമൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കും

ഉദാഹരണം 106

ത്രിപഞ്ചഗുണരാശിഭ്യാം യുക്തോരാശ്യോർ വധഃ കയോഃ

ദ്വിഷഷ്ടിപ്രമിതോ ജാതഃ തൗ രാശീ ത്വം വേത്സി ചേൽ വദ

അർത്ഥം

തിപഞ്ചഗുണരാശിഭ്യാം = 3,5 എന്നിവ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച സംഖ്യകൾ, രാശ്യോർ വധഃ = സംഖ്യകളുടെ ഗുണിതം, ദ്വിഷഷ്ടിപ്രമിതം = 62 മൂല്യം

സാരം

രണ്ടു അവ്യക്തസംഖ്യകളെ 3, 5 എന്നിവ കൊണ്ടു യഥാക്രമം ഗുണിച്ച് അവയുടെ ഗുണിതവും കൂട്ടുമ്പോൾ 62 ആകുന്നു. ആ സംഖ്യകൾ താങ്കൾക്ക് അറിയാമെങ്കിൽ പറയുക

സംഖ്യകൾ x, y എന്നു സങ്കല്പിക്കുക

$3x + 5y + xy = 62$

ഭാവിതം ഒരു വശത്താക്കുക

$xy = 62 - 3x - 5y$

ഗുണകാര ഗുണിതം + സംഖ്യാ $= -3 \times -5 + 62 = 77$

$$p = \frac{77}{a} \qquad x = p - 5 \qquad y = a - 3$$

a = 11 എന്നായാൽ p = 7, x = 7-5 = 2 , y = 11- 3 = 8

a = 7 എന്നായാൽ p = 11, x = 11-5 = 6 , y =7- 3 = 4

ഇപ്രകാരം മൂല്യങ്ങൾ കണക്കാക്കാം.

ഗ്രന്ഥസമാപ്തി

ആസിത് മഹേശ്വര ഇതി പ്രഥിതഃ പൃഥിവ്യാം
ആചാര്യവര്യ പദവീം വിദുഷാം പ്രയാതഃ
ലബ്ധ്വാ*f*വബോധ കലികാം തത ഏവ ചക്രേ
തജ്ജേജന ബീജഗണിതം ലഘു ഭാസ്ക്കരേണ

അർത്ഥം

ആസീത് = ഉണ്ടായി, പ്രഥിതഃ = പ്രഖ്യാതനായ, പൃഥിവ്യ = ബ്രാഹ്മണൻ, പ്രയാത് = യശശരീരനായ, അവബോധം = വിജ്ഞാനം, തജ്ജം = അദ്ദേഹത്തിന്റെ പുത്രൻ

സാരം

മഹേശ്വരനെന്നു പേരായി ലോകപ്രസിദ്ധനായ പണ്ഡിതനുണ്ടായിരുന്നു. വിദ്വാന്മാരുടെ ഇടയിൽ പ്രശസ്തനായ ആചാര്യശ്രേഷ്ഠനായിരുന്നു അദ്ദേഹം. അദ്ദേഹത്തിൽ നിന്നു ലഭിച്ച വിജ്ഞാന ശകലം അദ്ദേഹത്തിന്റെ പുത്രനായ ഭാസ്ക്കരൻ ബീജഗണിതമെന്ന പേരിൽ ചുരുക്കി പ്രതിപാദിച്ചു.

ബ്രഹ്മാഹ്വയ ശ്രീധര പത്മനാഭ
ബീജാനി യസ്മാദതി വിസ്തൃതാനി
ആദായ തൽസാരം അകാരി ന്യൂനം
സദ് യുക്തി യുക്തം ലഘു ശിഷ്യ തുഷ്ടയൈ

അർത്ഥം

ബ്രഹ്മാഹ്വയൻ = ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ, ശ്രീധരൻ = ശ്രീധരാചാര്യൻ, പത്മനാഭ = പത്മനാഭാചാര്യൻ, ആദായ = സ്വീകരിച്ച്

സാരം

ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ, ശ്രീധരൻ, പത്മനാഭൻ എന്നിവർ വളരെ വിസ്തരിച്ച് ബീജഗണിതം രചിച്ചിട്ടുണ്ട്. അവയിൽ നിന്നും സാരാംശം സ്വീകരിച്ച് യുക്തിസഹമായി ശിഷ്യഗണത്തിന് ആനന്ദപ്രദമാക്കാൻ ഈ ചെറിയ ഗ്രന്ഥം രചിച്ചു.

അത്രാനുഷ്ടുപ് സഹസ്രം ഹി
സസൂത്രോദ്ദേശകേ മിതിഃ

അർത്ഥം

സസൂത്ര ഉദ്ദേശകം = കരണസൂത്രത്തോടും ഉദാഹരണങ്ങളോടും കൂടി.

സാരം

ഇവിടെ അനുഷ്ടുപ്പു വൃത്തത്തിൽ ആയിരം ശ്ലോകങ്ങൾ കരണസൂത്രങ്ങളും ഉദാഹരണങ്ങളുമായി കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ക്വചിത് സൂത്രാർത്ഥ വിഷയാ വ്യാപ്തം ദർശയിതും ക്വചിത്
ക്വചിത് ച കൽപനാഭേദം ക്വചിത് യുക്തിം ഉദാഹൃതം
നഹി ഉദാഹരണാന്തോfസ്തി സ്തോകമുക്തമിദം യതഃ

അർത്ഥം

ക്വചിത് = ചിലപ്പോൾ, കൽപനാഭേദം = സങ്കല്പവൈവിധ്യം, സ്തോകം = കാഠിന്യം

സാരം

ഇതിൽ കരണസൂത്ര വിഷയങ്ങളും അവയുടെ വ്യാഖ്യാനവും കണ്ടേക്കാം. ചിലപ്പോൾ സങ്കല്പ വൈവിധ്യവും ചിലയിടങ്ങളിൽ യുക്തികൾ ഉദാഹരണമായും കൊടുത്തിട്ടുണ്ടാകും. ചിലയിടത്ത് സൂത്രാർത്ഥങ്ങൾ ഉദാഹരണമായി കണ്ടേക്കാം.

ഉദാഹരണങ്ങൾ അനന്തമാണ്. അവ ലളിതമായി ഇവിടെ പ്രതിപാദിച്ചിട്ടുണ്ട്.

ദുസ്തരഃ സ്തോകബുദ്ധിനാം ശാസ്ത്രവിസ്താര വാരിധിഃ
അഥവാ ശാസ്ത്രവിസ്തൃത്യാ കിം കാര്യം സുധിയാമപി

അർത്ഥം

ദുസ്തരഃ = കടക്കാൻ പ്രയാസമായത്, സ്തോകബുദ്ധി = സാധാരണ മന്ദബുദ്ധിമാന്മാർക്ക്, ശാസ്ത്രവിസ്താരവാരിധി = ശാസ്ത്രമെന്ന വിസ്തൃത സമുദ്രം

സാരം

സാധാരണ മനുഷ്യർക്ക് ശാസ്ത്രമെന്ന വിസ്തൃത സമുദ്രം കടക്കാൻ വിഷമമാണ്. അഥവാ ബുദ്ധിമാന്മാരോട് ശാസ്ത്രം

വിസ്തരിച്ച് പ്രതിപാദിക്കേണ്ട കാര്യമെന്ത്?

ഉപദേശലവം ശാസ്ത്രം കുരുതേ ധീമതോ യതഃ
തത്തുപ്രാപ്യൈവ വിസ്താരം സ്വയമേവാപഗച്ഛതി

അർത്ഥം

ഉപദേശ ലവം = അല്പം ഉപദേശം, തൽ തുപ്രാപ്യൈവ = അതിൽ നിന്നും വ്യാപരിക്കുന്നു.

സാരം

ബുദ്ധിമാന്മാർക്കു നൽകുന്ന അല്പം ശാസ്ത്രവിഷയത്തിലെ ഉപദേശം സ്വയം വികസിപ്പിക്കുകയും വ്യാപരിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

ജലേ തൈലം ഖലേ ഗുഹ്യം പാത്രേദാനമനാഗപി
പ്രജ്ഞേ ശാസ്ത്രം സ്വയം യാതി വിസ്താരം വസ്തുശക്തിതഃ

അർത്ഥം

തൈലം = എണ്ണ, ഖലൻ = ദുഷ്ടൻ, മനാഗപി = അല്പമായാൽ പോലും, പ്രജ്ഞൻ = വിദ്വാൻ

സാരം

ജലത്തിൽ എണ്ണ, ദുഷ്ടനോടു പറയുന്ന രഹസ്യം അർഹിക്കുന്ന പാത്രത്തിലെ ദാനം എന്നിവ പോലെ വിദ്വാൻമാർക്ക് ലഭിക്കുന്ന ശാസ്ത്രവിജ്ഞാനം എത്ര ചെറുതായാൽ പോലും സ്വയമേവ ശക്തിമത്തായി വികസിക്കുന്നു. (പരക്കുന്നു).

ഉല്ലസദമലമതീനാം
ത്രൈരാശികമാത്രമേവ പാടീ
ബുദ്ധിരേവ ബീജം
തഥാ മന്ത്രാധ്യായേ മയോക്തം
അസ്തി ത്രൈരാശികം പാടീ
ബീജം ച വിമലാ മതിഃ
കിമജ്ഞാതം സുബുദ്ധീനാം
അതോ മന്ദാർഥമുച്യുതേ.

സാരം

ഗോളാധ്യായത്തിൽ ഞാൻ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. തീവ്രബുദ്ധിമാന്മാർക്ക് പാടീഗണിതം ത്രൈരാശികം മാത്രമാണ്. ബീജഗണിതം ബുദ്ധിതന്നെയാണ് ബുദ്ധിമാന്മാർക്ക് ത്രൈരാശികം തന്നെ

പാടിഗണിതവും ബീജഗണിതവും. സുബുദ്ധികൾക്ക് എന്താണ് അറിയാത്തത്? അതിനാൽ മന്ദബുദ്ധികൾക്കു വേണ്ടിയാണ് ഞാൻ അതു വിസ്തരിച്ചു പറഞ്ഞിട്ടുള്ളത്

ഗണക ഭണിതിരമ്യം ബാല ലീലാവഗമ്യം
സകലഗണിതസാരം സോപപത്തിപ്രകാരം
ഇതി ബഹുഗുണയുക്തം സർവ്വദോഷൈർ വിമുക്തം
പഠ, പഠ മതിവൃദ്ധ്യൈ ലബ്ധിദം പ്രൗഢ സിദ്ധ്യൈ

അർത്ഥം

ഗണകഭണിതി = ഗണിത വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക്, ഉപപത്തി = നിയമം, മതിവൃദ്ധി = ബുദ്ധിവികാസം

സാരം

ഗണിത വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് ആനന്ദകരവും കുട്ടികൾക്ക് ലളിതവുമായി തോന്നുന്നതും ആയ സകല ഗണിതത്തിന്റെയും സാരം നിയമസഹിതം എല്ലാ ഗുണങ്ങളോടും കൂടി, എല്ലാ ദോഷങ്ങളും ഒഴിവാക്കി, ഇവിടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ബുദ്ധി വികാസത്തിനും പ്രൗഢസിദ്ധികൾ ലഭിക്കുന്നതിനും ഇത് പഠിക്കുക, പഠിക്കുക.

ഇതി ഭാസ്ക്കരാചാര്യ വിരചിതം
സിദ്ധാന്തശിരോമണി ബീജഗണിതാധ്യായം സമാപ്തം.

ശുഭം

ശുദ്ധിപത്രം

പേജ്	വരി	തെറ്റ്	ശരി
74	24	$a\alpha_0^{\ 2} - \beta_0^{\ 2}$	ആവർത്തനം വേണ്ട
76	14	$19x^2 - 1 = y^2$	$19x^2 + 1 = y^2$
80	11	$y = 67 \times 27^2 \times 221^2$	$y = 67 \times 27^2 + 221^2$
91	8	$y = 13\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}$	$y = 13 \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}$
91	10	$y = 13\frac{33}{2} \times \frac{11}{2}$	$y = 13 \times \frac{33}{2} \times \frac{11}{2}$
101	1	$\frac{5 \times n}{100} = \frac{10 \times n}{100} (etc)$	$\frac{5\,xn}{100} = \frac{10\,xn}{100} (etc)$
113	25	$x^3 - y^3$	$x^3 + y^3$
115	ചിത്രം3		C 15 13 A 14 D B
129	11	പ്രിതിനാദ	പ്രതിനാദ
154	14	ദ്വഗ്രം	ദ്വ്യഗ്രം
154	23	ദ്വഗ്രം	ദ്വ്യഗ്രം
154	27	ഷഡ്ക്രം	ഷഡഗ്രം
163	25	ക്രിയവിക്രിയം	ക്രയവിക്രയം
178	17	$x^2 + y^2$	$x^3 + y^2$
185	8	യാഗാന്തര	യോഗാന്തര
185	16	യാഗാന്തര	യോഗാന്തര
205	25	രാശൈക്യം	രാശ്യൈക്യം

ശുദ്ധിപത്രം

പേജ്	വരി	തെറ്റ്	ശരി
13	8	കരണസൂതം	കരണസൂത്രം
14	10	(e) വർഗ്ഗം, വർഗ്ഗമൂലം	(e) വർഗ്ഗം, (f) വർഗ്ഗമൂലം
58	22	$x = 30 \div 1$	$x = 30 \div 11$
113	25	$x^3, y^3 = etc$	$x^3 + y^3 = etc$
144	29	തന്മാനം = ഇഷ്ടം, പരികല്പ്യാ	തന്മാനം ഇഷ്ടം പരികല്പ്യ
145	20	വ്യസ്തസ്ത	വ്യസ്ത
153	7	$25n_3 + 1 = 9n_2$	$25n_3 + 10 = 9$
154	4	$x = 36k_1 + 35$	$x = 36k^1 + 35$
154	27	ഷഢ്ഗ്രം	ഷഢഗ്രം
181	7	$9v^2 = 56y^2 + 9 = (3z)^2$	$9v^2 = 56y^2 + 9 = z^2$
181	14	$x = \frac{180}{3} \times 6 = 300,$	$x = \frac{180}{3} \times 5 = 300,$
185	8	യാഗാന്തരക്ഷേപകഭാജിതാദ്യൃത്	യോഗാന്തരക്ഷേപകഭാജിതാദ്യാത്
185	16	യാഗാ	യോഗാ
187	24	$x + y = a^2 - 3 (b+2)^2 - 3$	$x + y = a^2 - 3 = (b+2)^2 - 3$
187	25	$2x = a^2 + b - 6,$	$2x = a^2 + b^2 - 6,$
188	4	$(b^2 + 2b - 1)$	$(b^2 + 2b - 1)^2$
188	7	$\left[(b+1)^2 - 2\frac{(b+1)}{2}2\right]$	$\left[(b+1)^3 - 2\frac{(b+1)}{2}2\right]$
190	14	$y = 4$	$z = 4$
192	25	$y = 15z + 5 = 275 = z = \frac{270}{15} = 18$	$y = 15z + 5 = 275; z = \frac{270}{15} = 18$
193	15	ഘനസംഖ്യ $-a^3$	ഘനസംഖ്യ $= a^3$
193	16	$3x$ ഘനമൂല	$3\times$ ഘനമൂല
216	12	പ്രജ്ഞെത	പ്രാജ്ഞെത



ഡോ. വി. ബാലകൃഷ്ണപണിക്കർ

ഡോ. വി. ബാലകൃഷ്ണപണിക്കർ ചേർത്തലയിൽ, (1930) ജനിച്ചു. തിരുവനന്തപുരം എഞ്ചിനീയറിംഗ് കോളേജിൽ നിന്നും B.Tech., M.Tech. എന്നീ ബിരുദങ്ങളും (മെക്കാനിക്കൽ എഞ്ചിനീയറിങ്ങിൽ) ബാംഗ്ലൂരിലെ ഇന്ത്യൻ ഇൻസ്റ്റിറ്റ്യൂട്ട് ഓഫ് സയൻസിൽ നിന്നും ശബ്ദമലിനീകരണ നിയന്ത്രണത്തിൽ ഗവേഷണ ബിരുദവും സമ്പാദിച്ചു. തിരുവനന്തപുരം, പാലക്കാട്, കാസർകോട് എന്നിവിടങ്ങളിലെ എഞ്ചിനീയറിംഗ് കോളേജുകളിൽ അദ്ധ്യാപകനായും പാലക്കാട് എൻ. എസ്സ്. എസ്സ് എഞ്ചിനീയറിംഗ് കോളേജ്, കാസർകോട് എൽ. ബി. എസ്സ്. എഞ്ചിനീയറിംഗ് കോളേജ് എന്നിവയുടെ പ്രിൻസിപ്പാളായും സേവനമനുഷ്ഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. കേരള പൊതുമരാമത്ത് വകുപ്പിൽ എഞ്ചിനീയറായും പാലക്കാട് ഫ്ളൂയിഡ് കൺട്രോൾ റിസേർച്ച് ഇൻസ്റ്റിറ്റ്യൂട്ടിന്റെ ജോയിന്റ് ഡയറക്റ്ററായും പ്രവർത്തിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇപ്പോൾ കോഴിക്കോട് K.M.C.T. എഞ്ചിനീയറിംഗ് കോളേജിന്റെ ഡയക്റ്ററായും പ്രിൻസിപ്പാളായും പ്രവർത്തിച്ചു വരുന്നു.

സ്വദേശി ശാസ്ത്രപ്രസ്ഥാനത്തിന്റെ തുടക്കം മുതൽ പത്തു വർഷം പ്രസിഡന്റായിരുന്നു ഇപ്പോൾ അതിന്റെ രക്ഷാധികാരിയും പ്രസിദ്ധീകരണ വിഭാഗത്തിന്റെ തലവനുമാണ്. അദ്ദേഹത്തിന്റെ മറ്റു കൃതികളായ ലീലാവതി, ആര്യഭടീയം എന്നിവ പ്രസിദ്ധീകരിച്ചിട്ടുള്ളത് കുരുക്ഷേത്ര പ്രകാശനാണ്.

സ്വദേശി ശാസ്ത്രപ്രസ്ഥാനത്തിന്റെ ആഭിമുഖ്യത്തിൽ വേദഗണിതം പ്രചരിപ്പിക്കുന്നതിൽ ഡോ. പണിക്കർ പ്രധാനപങ്ക് വഹിച്ചിട്ടുണ്ട്.

സ്വദേശി ശാസ്ത്രപ്രസ്ഥാനം (കേരളം)
കൊച്ചി



വില: 125.00 രൂപ

ISBN 81-901740-0-2